

# Rapport EA : Initiation à la recherche

Axel Benyamine, Guillaume Février et Julien Lambert

Décembre 2023

## 1 Introduction

Les processus d'Itô sont d'une importance capitale dans le domaine du calcul stochastique. Ils possèdent des applications dans de nombreux domaines, en particulier les mathématiques financières. D'autres usages existent dans les sciences appliquées comme la physique, la biologie et la mécanique quantique. Néanmoins, le caractère continu de ces processus mais surtout la difficulté de connaître la loi du processus, même en un point donné rend nécessaire l'approximation de ces processus par des processus discrets. Plusieurs questions sur la qualité de ces approximations se posent, et sont cruciales pour garantir la validité des applications concrètes en résultant. Nous nous sommes intéressés à une méthode particulière de simulation utilisant des chaînes de Markov et avons analysé la vitesse de convergence de ces chaînes vers des processus d'Itô cibles.

Des travaux portent déjà sur cette problématique, notamment ceux de Denis Talay et de Clément Rey, notre tuteur. Nous nous sommes appuyés sur plusieurs de leur résultats dans le cadre de notre travail, en retrouvant des processus markoviens convergeant en  $O(n^{-2})$ , où  $n$  désigne le nombre de simulations aléatoires à effectuer. Nous avons aussi tenté de pousser le raisonnement pour obtenir une convergence en  $O(n^{-3})$ .

## 2 Notations

Nous considérons un processus d'Itô de la forme :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

où  $b$  et  $\sigma$  sont des fonctions données et  $W_t$  est un mouvement brownien.

Nous définissons pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $T > 0$  la chaîne de Markov :

$$\forall k \in \mathbb{N}, X_{t_{k+1}}^n = \phi \left( X_{t_k}^n, \frac{Z_{k+1}}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \right)$$

où les  $t_k = \frac{kT}{n}$  forment la grille de temps, les  $Z_k$  sont des variables aléatoires indépendantes à valeur dans  $\mathbb{R}$ , et  $\phi$  est une fonction appelée *schéma*, telle que  $\phi(x, 0, 0) = x$ . Dans la suite, nous prendrons les  $Z_k$  i.i.d. de mêmes moments

que  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

On notera aussi  $P_t^N$  le semi-groupe de Markov associé à  $(X_{t_k}^N)_k$ , défini par  $P_t^N f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^N) | X_0 = x]$  pour toute fonction  $f$  mesurable.  $(X_{t_k}^N)_k$  étant une chaîne de Markov, on a en particulier  $P_t^N P_s^N = P_{t+s}^N$ .

Pour un processus d'Itô  $(X_t)$ , on note  $P_t$  le semi-groupe de Markov associé au processus, tel que  $P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x]$ . De même, on a  $P_t P_s = P_{t+s}$ .

Pour  $(X_t)$  suivant la dynamique  $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ , on a  $P_t = \exp(tA)$ , avec  $A[f] = bf' + \frac{\sigma^2}{2}f''$ .  $A$  est appelé le générateur infinitésimal.

Pour  $q \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  l'espace des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$   $q$  fois dérivables et à dérivées bornées.

Pour  $q \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  et  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ , on note  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$  et  $\partial_\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f(x)$ . Nous utiliserons la norme suivante :

$$\|f\|_{\infty, q} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq q} |\partial_\alpha f(x)|$$

Enfin, nous introduisons la notion de *convergence en variation totale* d'ordre  $h$ , qui a lieu lorsqu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$\sup_{t_k \leq T} \|P_{t_k} f - P_{t_k}^n f\|_\infty \leq \frac{C}{n^h} \|f\|_\infty$$

pour toute fonction  $f$  mesurable.

Dans la suite nous utiliserons une notion plus faible de convergence en variation totale, et nous dirons que le schéma  $\phi$  est d'ordre  $h$  lorsqu'il existe  $C > 0$  et  $q \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}), \sup_{t_k \leq T} \|P_{t_k} f - P_{t_k}^n f\|_{\infty, q} \leq \frac{C}{n^h} \|f\|_{\infty, q}$$

### 3 Résultats

Nous présentons dans cette partie les résultats théoriques sur lesquels nous avons travaillé ainsi que leurs preuves. Dans certains cas, les démonstrations seront admises et nous renverrons à l'article les présentant.

On reprend le processus  $(X_t)_t$  et la chaîne de Markov  $(X_{t_k}^n)_k$  introduits dans la section précédente. nous allons dans cette section montrer un certain nombre de conditions suffisantes sur  $\phi$  pour que le schéma soit d'ordre  $h$ .

Ici, pour la simplicité des démonstrations, nous regarderons des pas de taille  $1/n$ , et nous nous intéresserons seulement au processus au temps 1. Les démonstrations sont adaptables à des pas de taille  $T/n$ , et d'autres points sur la grille de temps correspondante.

**Proposition 3.1.** Supposons qu'il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists L_n > 0, \forall f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}), \|P_{1/n}^n f\|_{\infty, q} \leq L_n \|f\|_{\infty, q} \quad (3.1)$$

et la suite  $((L_n)^n)_n$  est bornée par un  $L \geq 1$ .

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}), \|P_{1/n} f - P_{1/n}^n f\|_{\infty} \leq C \|f\|_{\infty, q} n^{-(1+h)} \quad (3.2)$$

Alors il existe  $K > 0$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, |\mathbb{E}_x [f(X_1) - f(X_1^n)]| \leq K \frac{\|f\|_{\infty, q}}{n^h}$$

c'est-à-dire que le schéma est d'ordre  $h$ .

L'article de notre tuteur [1] démontre comment obtenir un résultat similaire en remplaçant  $\|f\|_{\infty, q}$  par  $\|f\|_{\infty}$  à partir d'un jeu d'hypothèses modifiées. On retrouve alors la notion de convergence en variation totale introduite plus haut.

*Démonstration*

Tout d'abord, on a

$$P_1 - P_1^n = \sum_{k=0}^{n-1} P_{\frac{k+1}{n}} P_{\frac{n-k-1}{n}}^n - P_{\frac{k}{n}} P_{\frac{n-k}{n}}^n = \sum_{k=0}^{n-1} P_{\frac{k}{n}} \left( P_{\frac{1}{n}} - P_{\frac{1}{n}}^n \right) P_{\frac{n-k-1}{n}}^n$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_x [f(X_1) - f(X_1^n)]| &\leq \|P_1 f - P_1^n f\|_{\infty} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| P_{\frac{k}{n}} \left( P_{\frac{1}{n}} - P_{\frac{1}{n}}^n \right) P_{\frac{n-k-1}{n}}^n f \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

Par définition de  $P_{k/n}$ , puis (3.2) et enfin (3.1) appliqué  $k$  fois,

$$\left\| P_{\frac{k}{n}} \left( P_{\frac{1}{n}} - P_{\frac{1}{n}}^n \right) P_{\frac{n-k-1}{n}}^n f \right\|_{\infty} \leq C L_n^k \|f\|_{\infty, q} n^{-1-h} \leq C L \|f\|_{\infty, q} n^{-1-h}$$

On en déduit alors le résultat en sommant.

Cette proposition nous permet notamment de ne plus regarder que des propriétés en *temps court*, c'est-à-dire en regardant un seul pas de temps.

Pour la suite, on supposera que  $\phi$  vérifie (3.1) pour les  $q$  considérés. En effet, il est possible d'énoncer certaines conditions suffisantes pour que (3.1) soit vérifiée, mais nous avons décidé de ne pas les faire apparaître pour des raisons de concision.

On supposera également que  $\phi$ ,  $b$  et  $\sigma$  sont dérivables aux ordres considérés, et que leurs dérivées sont bornées.

**Proposition 3.2.** Il existe  $K > 0$  tel que pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^{2h+2}(\mathbb{R})$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\left| \mathbb{E}_x \left[ f \left( X_{\frac{1}{n}}^n \right) \right] - \sum_{s=0}^h n^{-s} \sum_{l=0}^s \frac{\mathbb{E} [Z^{2l}]}{(s-l)!(2l)!} \partial_z^{s-l} \partial_y^{2l} (f \circ \phi)(x, 0, 0) \right| \leq K \frac{\|f\|_{\infty, 2h+2}}{n^{1+h}} \quad (3.3)$$

*Démonstration*

Soit  $f \in \mathcal{C}^{2h+2}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{E}_x[f(X_{1/n}^n)] = \mathbb{E} \left[ (f \circ \phi) \left( x, \frac{Z}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \right) \right]$$

On pose donc  $g = f \circ \phi$ .

En prenant le développement en Taylor (6.1) en annexe, et avec  $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E} [Z^{2k+1}] = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[f(X_{1/n}^n)] &= \sum_{k=0}^h \sum_{l=0}^{h-k} \frac{\mathbb{E} [Z^{2l}]}{n^{k+l} k! (2l)!} \partial_y^{2l} \partial_z^k g(x, 0, 0) \\ &+ \sum_{k=0}^h \frac{1}{n^{1+h} k! (2h-2k+1)!} \mathbb{E} \left[ Z^{2h-2k+2} \int_0^1 (1-t)^{2h-2k+1} \partial_y^{2h-2k+2} \partial_z^k g(x, \frac{tZ}{\sqrt{n}}, 0) dt \right] \\ &+ \frac{1}{h! n^{1+h}} \mathbb{E} \left[ \int_0^1 (1-t)^h \partial_z^{1+h} g(x, \frac{Z}{\sqrt{n}}, \frac{t}{n}) dt \right] \end{aligned}$$

En notant

$$R_k(x) = \frac{1}{n^{1+h} k! (2h-2k+1)!} \mathbb{E} \left[ Z^{2h-2k+2} \int_0^1 (1-t)^{2h-2k+1} \partial_y^{2h-2k+2} \partial_z^k g(x, \frac{tZ}{\sqrt{n}}, 0) dt \right]$$

et

$$R(x) = \frac{1}{h! n^{1+h}} \mathbb{E} \left[ \int_0^1 (1-t)^h \partial_z^{1+h} g(x, \frac{Z}{\sqrt{n}}, \frac{t}{n}) dt \right]$$

On a :

$$\mathbb{E}_x[f(X_{1/n}^n)] = \sum_{s=0}^h n^{-s} \sum_{l=0}^s \frac{\mathbb{E} [Z^{2l}]}{(s-l)!(2l)!} \partial_y^{2l} \partial_z^{s-l} g(x, 0, 0) + R(x) + \sum_{k=0}^h R_k(x)$$

Soit  $k \in \llbracket 0, h \rrbracket$ .

$$\int_0^1 (1-t)^{2h-2k+1} \left| \partial_y^{2h-2k+2} \partial_z^k g \left( x, \frac{tZ}{\sqrt{n}}, 0 \right) \right| dt \leq \frac{\|g\|_{\infty, 2h-k+2}}{2h-2k+2} \leq \frac{\|g\|_{\infty, 2h+2}}{2h-2k+2}$$

D'où

$$|R_k(x)| \leq \frac{\mathbb{E} [Z^{2h-2k+2}]}{k! (2h-2k+2)!} \frac{\|g\|_{\infty, 2h+2}}{n^{1+h}}$$

De même,

$$\int_0^1 (1-t)^h \left| \partial_z^{1+h} g \left( x, \frac{Z}{\sqrt{n}}, \frac{t}{n} \right) \right| dt \leq \frac{\|g\|_{\infty,1+h}}{1+h} \leq \frac{\|g\|_{\infty,2h+2}}{1+h}$$

On en déduit enfin :

$$|R(x)| \leq \frac{1}{(1+h)!} \frac{\|g\|_{\infty,2h+2}}{n^{1+h}}$$

Enfin, les contrôles des  $R_k(x)$  et de  $R(x)$ , ainsi que le lemme (6.2) en annexe nous donnent le résultat souhaité.

Ce résultat signifie en particulier que l'on peut faire un développement de  $\mathbb{E}_x \left[ f(X_{1/n}^n) \right]$  avec un reste de l'ordre de  $n^{-h-1}$ . Nous allons donc de faire de même pour  $\mathbb{E}_x [f(X_{1/n})]$ .

**Lemme 3.1.** Il existe  $(K_k^n)_{n \geq 1, 1 \leq k \leq 2n}$  des fonctions telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in \mathcal{C}^2, A^n f = \sum_{k=1}^{2n} K_k^n f^{(k)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall 1 \leq k \leq 2n, K_k^n \in \mathbb{R} [b, \sigma, b', \sigma' \dots, b^{(2n-2)}, \sigma^{(2n-2)}]$$

*Démonstration*

On pose  $K_1^1(x) = b(x)$ ,  $K_2^1(x) = \mu(x) = \frac{\sigma(x)^2}{2}$

Puis on définit  $K_k^n(x)$  par récurrence de la manière suivante :

$$K_k^n(x) = 0 \text{ si } k \leq 0 \text{ ou } k > 2n$$

$$K_k^{n+1}(x) = b(x)K_k^{n'}(x) + b(x)K_{k-1}^n(x) + \mu(x)K_k^{n''}(x) + 2\mu(x)K_{k-1}^{n'}(x) + \mu(x)K_{k-2}^n(x) \text{ sinon}$$

Par récurrence, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall 1 \leq k \leq 2n, K_k^n \in \mathbb{R} [b, \sigma, b', \sigma' \dots, b^{(2n-2)}, \sigma^{(2n-2)}]$$

Il nous reste simplement à montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n f = \sum_{k=1}^{2n} K_k^n f^{(k)}$$

Il est clair que  $Af = K_1^1 f' + K_2^1 f''$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que notre propriété soit vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1}f &= b(A^n f)' + \mu(A^n f)'' \\ &= b \sum_{k=1}^{2n} (K_k^{n'} f^{(k)} + K_k^n f^{(k+1)}) + \mu \sum_{k=1}^{2n} (K_k^{n''} f^{(k)} + 2K_k^{n'} f^{(k+1)} + K_k^n f^{(k+2)}) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} f^{(k)} (bK_k^{n'} + bK_{k-1}^n + \mu K_k^{n''} + 2\mu K_{k-1}^{n'} + \mu K_{k-2}^n) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} K_k^{n+1} f^{(k)} \end{aligned}$$

**Proposition 3.3.** Il existe  $K > 0$  tel que pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^{2h+2}(\mathbb{R})$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\left| \mathbb{E}_x \left[ f \left( X_{\frac{1}{n}} \right) \right] - \sum_{s=0}^h n^{-s} \frac{A^s f(x)}{s!} \right| \leq K \frac{\|f\|_{\infty, 2h+2}}{n^{1+h}} \quad (3.4)$$

*Démonstration*

Le lemme (6.3) en annexe nous donne que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [f(X_{1/n}) | X_0 = x] &= \sum_{k=0}^h \frac{A^k f(x)}{n^k k!} + \frac{1}{n^{1+h} h!} \int_0^1 (1-t)^h P_{s/n} A^{1+h} f(x) ds \\ &= \sum_{k=0}^h \frac{A^k f(x)}{n^k k!} + \frac{1}{n^{1+h} h!} \int_0^1 (1-t)^h \mathbb{E}_x [A^{1+h} f(X_{s/n})] ds \end{aligned}$$

On en déduit notamment que

$$\left| \mathbb{E} [f(X_{1/n}) | X_0 = x] - \sum_{k=0}^h \frac{A^k f(x)}{n^k k!} \right| \leq \frac{\|A^{1+h} f\|_{\infty}}{n^{1+h} (1+h)!}$$

Or le lemme précédent nous montre que si  $b$ ,  $\sigma$  et leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $2h$  sont bornées, les  $K_k^{1+h}$  sont bornées et il existe donc  $K > 0$

$$\forall f \in \mathcal{C}^{2h+2}(\mathbb{R}), \|A^{1+h} f\|_{\infty} \leq K \|f\|_{\infty, 2h+2}$$

On en déduit alors le résultat.

**Théorème 3.1.** Si  $\phi$  est tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^{2h+2}(\mathbb{R}), \forall s \in \llbracket 1, h \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{A^s f(x)}{s!} = \sum_{l=0}^s \frac{\mathbb{E} [Z^{2l}]}{(s-l)!(2l)!} \partial_z^{s-l} \partial_y^{2l} (f \circ \phi)(x, 0, 0) \quad (3.5)$$

alors  $\phi$  est un schéma d'ordre  $h$ .

*Démonstration*

En utilisant les propositions (3.2) et (3.3), on en déduit que  $\phi$  vérifie l'équation (3.2). Avec la proposition (3.1), on en déduit le résultat final.

En utilisant les développements de  $A^n f$  du lemme (3.1) et de la dérivée d'une composée (équation (6.1) en annexe), on peut réécrire (3.5). En identifiant les coefficients devant  $f^{(k)}$  de part et d'autre, on trouve alors une nouvelle condition suffisante :

**Théorème 3.2.** Soit  $\phi$  un schéma. Si  $\phi$  vérifie :

$$\forall s \in \llbracket 1, h \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, 2s \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{K_k^s(x)}{s!} = \sum_{l=\max(0, k-s)}^s \frac{\mathbb{E} [Z^{2l}]}{(s-l)!(2l)!} \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{P}_k(s+l)} \prod_{E \in \mathcal{E}} \partial_y^{|E \cap \llbracket 1, 2l \rrbracket|} \partial_z^{|E \cap \llbracket 2l+1, s+l \rrbracket|} \phi(x, 0, 0) \quad (3.6)$$

Alors le schéma est d'ordre  $h$ .

On peut en particulier noter que les conditions d'ordre 1 se résument à

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \sigma(x) &= \partial_y \phi(x, 0, 0) \\ \forall x \in \mathbb{R}, b(x) &= \partial_z \phi(x, 0, 0) + \frac{1}{2} \partial_y^2 \phi(x, 0, 0)\end{aligned}$$

Ceci signifie donc, que tous les schémas vérifiant (3.1) pour  $q = 4$ , et tels que  $\partial_y \phi(x, 0, 0)$  et  $\partial_z \phi(x, 0, 0) + \frac{1}{2} \partial_y^2 \phi(x, 0, 0)$  soient bornées, convergent vers le même processus. Ceci est un *principe d'invariance*. De plus, les dérivées de  $b$  et  $\sigma$  peuvent être réécrites comme des dérivées directionnelles de  $\phi$  évaluées en  $(x, 0, 0)$ . On peut alors réécrire les équations de (3.6) en n'utilisant que  $\phi$ . A nouveau, ce deuxième point de vue nous offre un second principe d'invariance sur les vitesses de convergence des schémas.

## 4 Détermination de schémas explicites

Il nous a paru pertinent de chercher à déterminer les schémas à partir du processus continu à simuler et de la vitesse de convergence souhaitée, car c'est a priori la problématique rencontrée dans les cas d'applications concrètes. Dans la suite, nous nous munissons donc d'un processus d'Itô de la forme :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

Pour pouvoir expliciter des schémas sous une forme relativement simple, nous avons décidé de chercher des schémas polynomiaux en  $y$  et  $z$ . Nous pouvons écrire explicitement de tels  $\phi$ . Il existe  $d \in \mathbb{N}$  :

$$\phi(x, y, z) = x + \sum_{k=1}^d \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!(k-l)!} \partial_y^l \partial_z^{k-l} \phi(x, 0, 0) y^l z^{k-l} \quad (4.1)$$

Cette forme particulière de schémas ne respectent pas totalement les hypothèses sur  $\phi$  présentées précédemment. En effet,  $\phi$  ni ses dérivées ne sont bornées. Cependant, il est tout de même possible de montrer que dans ce cas-ci, la proposition (3.3) est toujours vraie (qui est la seule utilisant le caractère borné de  $\phi$  et ses dérivées par l'intermédiaire du lemme (6.2)). Il est également possible de montrer qu'à condition que les dérivées de  $b$  et  $\sigma$  soient bornées (jusqu'aux ordres nécessaires), la condition (3.1) est vérifiée. Pour cette condition,  $b$  et  $\sigma$  n'ont pas besoin eux-mêmes d'être bornés.

Nous cherchons un schéma d'ordre  $h$  sous la forme d'un polynôme de degré  $h$ , c'est à dire que :

$$\forall k > h, \forall l \in \llbracket 0, k \rrbracket, \partial_y^l \partial_z^{k-l} \phi(x, 0, 0) = 0$$

En utilisant (3.6), on obtient alors des conditions suffisantes sur les dérivées de  $\phi$ , et celles de  $b$  et  $\sigma$ . Leur résolution donne une solution  $\phi$  explicite.

### Ordre 1

Ici, on cherche  $\phi$  de degré 1 :  $\phi(x, y, z) = x + \partial_y\phi(x, 0, 0)y + \partial_z\phi(x, 0, 0)z$  (3.5) donne :

$$Af = \partial_z g(\cdot, 0, 0) + \frac{1}{2}\partial_y^2 g(\cdot, 0, 0)$$
$$bf' + \frac{\sigma^2}{2}f'' = (\partial_z\phi(\cdot, 0, 0) + \frac{1}{2}\partial_y^2\phi(\cdot, 0, 0))f' + \frac{1}{2}(\partial_y\phi(\cdot, 0, 0))^2 f''$$

En utilisant les conditions sur  $\phi$  et en identifiant les coefficients devant  $f'$  et  $f''$ , on trouve qu'il est suffisant de prendre :

$$\partial_y\phi(\cdot, 0, 0) = \sigma$$

$$\partial_z\phi(\cdot, 0, 0) = b$$

On remarque qu'on retrouve ici le schéma d'Euler, un schéma d'ordre 1 connu. Il est abordé plus en détail dans l'article [2].

### Ordre 2

La méthode reste exactement la même pour l'ordre 2, avec  $\phi$  qui devient de degré 2. Néanmoins, les calculs deviennent plus lourds et nous ne les présenterons pas en détail dans ce rapport. Les conditions trouvées à l'ordre 1 restent valables et s'ajoutent aux nouvelles équations obtenues avec (3.6) pour  $s = 2$ .

Notons que la condition sur  $\partial_z\phi(\cdot, 0, 0)$  change, car le terme  $\partial_y^2\phi(\cdot, 0, 0)$  n'est plus égal à 0. Nous obtenons :

$$\partial_y\phi(\cdot, 0, 0) = \sigma$$
$$\partial_z\phi(\cdot, 0, 0) = b - \frac{\sigma\sigma'}{2}$$
$$\partial_y^2\phi(\cdot, 0, 0) = \sigma\sigma'$$
$$\partial_z^2\phi(\cdot, 0, 0) = bb' + \frac{\sigma^2}{2}b''$$
$$\partial_y\partial_z\phi(\cdot, 0, 0) = \frac{\sigma^2\sigma''}{4} + \frac{b\sigma' + \sigma b'}{2}$$

### Ordre 3

Les calculs se compliquent sérieusement. Nous sommes peu confiants des résultats trouvés, notamment pour  $\partial_y\partial_z^2\phi$  qui fait apparaître au dénominateur  $\sigma$  ne se simplifiant pas avec le numérateur. Nous trouvons :

$$\partial_y\phi(\cdot, 0, 0) = \sigma$$
$$\partial_z\phi(\cdot, 0, 0) = b - \frac{\sigma\sigma'}{2}$$
$$\partial_y^2\phi(\cdot, 0, 0) = \sigma\sigma'$$

$$\begin{aligned}
\partial_z^2 \phi(\cdot, 0, 0) &= \frac{6bb' - 2b\sigma'^2 - 4b\sigma\sigma'' + b''\sigma^2 - 4b'\sigma\sigma' - 5\sigma^2\sigma'\sigma'' - 3\sigma\sigma'^3 - 2\sigma^3\sigma^{(3)}}{6} \\
\partial_y \partial_z \phi(\cdot, 0, 0) &= \frac{\sigma'b + \sigma b'}{2} - \frac{\sigma^2\sigma'' + 2\sigma\sigma'^2}{4} \\
\partial_y^3 \phi(\cdot, 0, 0) &= \sigma^2\sigma'' + \sigma\sigma'^2 \\
\partial_z^3 \phi(\cdot, 0, 0) &= \frac{4bb'^2 + 4b^2b'' + bb^{(3)}\sigma^2 + 6b'b''\sigma^2 + b^{(4)}\sigma^4 + 4b^{(3)}\sigma^3\sigma' + 2b''\sigma^2\sigma'^2 + 2b''\sigma^3\sigma''}{4} \\
\partial_y^2 \partial_z \phi(\cdot, 0, 0) &= \frac{2b\sigma'^2 + 4b\sigma\sigma'' + 2b''\sigma^2 + 4b'\sigma\sigma' + 5\sigma^2\sigma'\sigma'' + 3\sigma\sigma'^3}{6} \\
\partial_y \partial_z^2 \phi(\cdot, 0, 0) &= \frac{2b^2\sigma'^2 + 10b'^2\sigma^2 + 2.5\sigma^4\sigma''^2 - 56\sigma^2\sigma'^2 + 18bb'\sigma\sigma' - 5b\sigma^2\sigma'\sigma''}{24\sigma} \\
&+ \frac{7\sigma^3\sigma'^2\sigma'' - 6b\sigma\sigma'^3 - 5b'\sigma^3\sigma'' - 6b'\sigma^2\sigma'^2 + 16bb''\sigma^2 + 6b''\sigma^3\sigma'}{24\sigma} \\
&+ \frac{8\sigma^4\sigma'\sigma^{(3)} + 8b^2\sigma\sigma'' + b\sigma^3\sigma^{(3)} + 8b^{(3)}\sigma^2 + 2\sigma^5\sigma^{(4)}}{24\sigma}
\end{aligned}$$

### Ordres supérieurs

Pour le calcul de solutions aux ordres suivants, les calculs à la main n'étaient plus raisonnables. Nous n'avons donc pas poussé le développement plus loin. Cependant, un outil de calcul formel pourrait facilement résoudre ces équations, sous réserve d'existence. En effet, après substitutions successives, il ne reste qu'un système d'équations linéaires pour déterminer un nouveau groupe d'inconnues. L'existence d'une solution n'est a priori pas garantie. En effet, à l'ordre  $h$ , (3.6) nous offre  $h(h+1)$  équations tandis que nous avons seulement  $\frac{h(h+3)}{2}$  inconnues. Etant donné la structure des équations, certaines équations deviennent redondantes avec des résolutions précédentes. En particulier, nous avons montré que les équations redondantes avec  $k = 2s$  ou  $k = 2s - 1$  sont toujours redondantes.

## 5 Simulations numériques

Dans cette partie, nous vérifions les résultats théoriques annoncés ci-dessus. Nous avons étudié, pour différents cas de processus stochastiques  $(X_t)$ , et différentes fonctions  $f$ , la vitesse de convergence des quantités  $|\mathbb{E}[f(X_T^N) - f(X_T)]|$ .

Nos résultats théoriques se concentrent sur les processus ayant  $b$  et  $\sigma$  bornés et à dérivées bornées et sur les fonctions  $f$  bornées et à dérivées bornées. Dans la suite nous présenterons un certain nombre de processus et de fonctions  $f$  qui sont non conformes au regard de nos hypothèses mais qui rentrent tout de même dans un cadre plus général ( $b$ ,  $\sigma$  et  $f$  à dérivées bornées) pour lequel nos résultats restent valables après discussion avec notre tuteur. Ces conditions correspondent (avec une condition d'ellipticité sur  $\sigma : \inf_t(\sigma(X_t)) > 0$ ) au cadre d'étude proposé dans la partie 3. de [3]. Après discussion avec notre tuteur, il est également possible de relâcher la condition d'ellipticité à  $\sigma(X_0) > 0$ .

Il convenait dans un premier temps de calculer une estimation précise de la quantité  $\mathbb{E}[f(X_T)]$ . Nous avons exploré différents cas de figure :

- Les processus pour laquelle la loi de  $X_T$  est connue.
- Les processus pour lesquels il est nécessaire de simuler la valeur en utilisant un schéma et en s'assurant qu'il y ait un nombre suffisant de pas de temps.

Pour simuler numériquement chacune des quantités  $\mathbb{E}[f(X_T)]$ ,  $\mathbb{E}[f(X_T^N)]$ , nous avons utilisé une méthode de Monte-Carlo classique.

Ici, la variance asymptotique de la méthode de Monte-Carlo est donnée par  $\mathbb{V}[f(X_T^N)]$ . Sans analyse plus poussée, il se pourrait que nos estimations de Monte-Carlo deviennent de plus en plus mauvaises lorsque  $N$  augmente, à  $M$  fixé. Lorsqu'on se place dans le cadre de notre étude, c'est-à-dire  $f$  bornée à dérivées bornées,  $f^2$  est également bornée à dérivées bornées. Cela signifie que  $\mathbb{V}[f(X_T^N)]$  va bien converger vers  $\mathbb{V}[f(X_T)]$ , et en particulier la suite des variances est bornée. Néanmoins, dans des cadres plus généraux où  $f$  est seulement à croissance linéaire par exemple,  $f^2$  ne vérifie pas ces hypothèses, et on n'a donc tel quel aucune garantie sur le comportement de  $\mathbb{V}[f(X_T^N)]$  quand  $N$  devient trop grand. Cependant, nous verrons ci-dessous qu'empiriquement, la variance de  $f(X_T^N)$  semble bien converger vers celle de  $f(X_T)$ .

Ce faisant, pour faire en sorte que l'erreur due à la méthode de Monte-Carlo ne modifie pas nos conclusions, il est nécessaire que l'erreur de Monte-Carlo soit petite devant l'erreur causée par notre schéma. Cela se traduit en ordres de grandeur par :

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \ll \frac{1}{N^s}$$

où  $s$  et  $N$  sont l'ordre et le nombre de pas de temps de la simulation, et  $M$  le nombre d'échantillons dans notre méthode de Monte-Carlo.

Par conséquent, nous avons choisi  $M \approx 100.N^{2s}$  et avons ainsi un temps de calcul des processus simulés en  $\mathcal{O}(N^{2s+1})$  avec précisément  $100.N^{2s+1}$  simulations de gaussiennes. Ce choix de  $M$  n'était pas toujours suffisamment grand pour pouvoir conclure sur les ordres de convergence de nos méthodes, mais face aux temps conséquents de simulation, nous n'avons pas pu augmenter sensiblement cette valeur.

En pratique, pour des processus d'ordre  $s = 2$  nous avons donc été confrontés à la difficulté de simuler en un temps raisonnable pour  $N > 50$  (en utilisant deux GPU T4) et il était impossible de garder en mémoire la totalité de la trajectoire à partir de  $N = 24$  (en disposant de 29Go de RAM).

Notons également qu'en pratique, on cherche plutôt à garantir une erreur de l'ordre d'un  $\varepsilon > 0$ . Dans ce cas, il faut que les erreurs dues à Monte-Carlo et au schéma soient toutes d'eux d'ordre  $\varepsilon$ . Ceci nous indique alors qu'il faut  $M \approx \varepsilon^{-2}$ , et  $N \approx \varepsilon^{-1/h}$ . Ce qui donne une complexité de calcul totale en  $\mathcal{O}(NM) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-(2+1/h)})$ . En particulier, il est asymptotiquement toujours plus intéressant d'utiliser des méthodes d'ordre supérieur.

Dans toute la suite, les graphiques présentés représenteront la convergence de  $|\mathbb{E}[f(X_T) - f(X_T^N)]|$  (gauche),  $\mathbb{E}[f(X_T^N)]$  (centre) et  $\mathbb{V}[f(X_T^N)]$  (droite) pour différents ordres  $s$ . Les zones floutées pour les graphiques à gauche et au centre représenteront les intervalles de confiance à 95% vis à vis de l'erreur de Monte-Carlo.

Dans toute la suite, les graphiques représentant la convergence de  $|\mathbb{E}[f(X_T) - f(X_T^N)]|$  vers 0 seront tracés en *log-log*. Ceci permet notamment de bien lire les ordres de convergences : une convergence à l'ordre  $s$  se traduit par une décroissance de pente  $-s$  sur ce graphique. Sur ce graphique, une zone floutée allant vers 0 (c'est-à-dire à l'infini vers le bas du graphique), signifie que l'intervalle de confiance de Monte-Carlo est plus grand que l'erreur  $|\mathbb{E}[f(X_T) - f(X_T^N)]|$ .

## 5.1 Processus dans le cadre de notre étude

Nous nous plaçons ici dans le cadre de processus  $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$  où  $b$  et  $\sigma$  sont bornées et à dérivées bornées.

### 5.1.1 Processus de la forme $X_t = h(W_t)$

En utilisant la formule d'Itô, il est possible d'exploiter les résultats de notre étude pour des processus de la forme

$$X_t = h(h^{-1}(X_0) + W_t)$$

Après identification, nous observons que pour de tels processus :

$$\begin{cases} b(X_t) = \frac{1}{2}h''(h^{-1}(X_t) - h^{-1}(X_0)) \\ \sigma(X_t) = h'(h^{-1}(X_t) - h^{-1}(X_0)) \end{cases} \quad (5.1)$$

Alors, en trouvant une fonction  $h$  qui satisfasse les contraintes qui découlent de ces expressions ( $h$  inversible,  $h'' \circ h^{-1}$  et  $h' \circ h^{-1}$  bornées et à dérivées bornées), nous disposons d'un processus pour lequel il est facile d'approximer  $\mathbb{E}[f(X_T)] = \mathbb{E}[f(h(h^{-1}(X_0) + W_T))]$

Un exemple de fonction  $h$  qui satisfasse ces contraintes est donné par

$$h(x) = x + \log(1 + e^x)$$

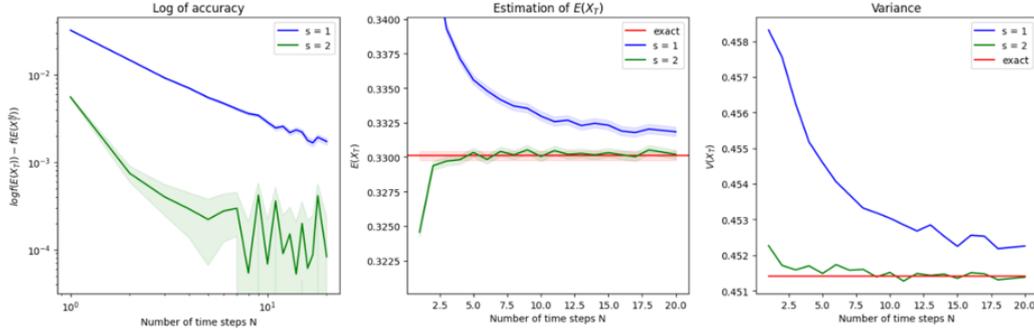


Figure 1: Etude de la convergence pour  $f = \tanh$  et différents ordres  $s$

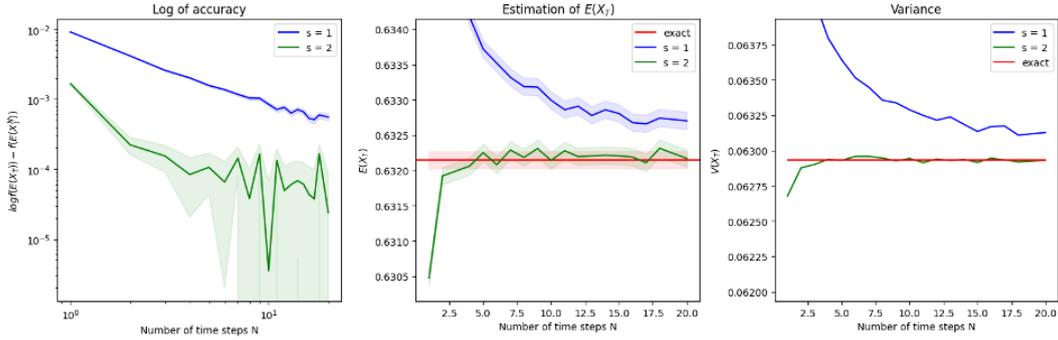


Figure 2: Etude de la convergence pour  $f = \text{sigmoid}$  et différents ordres  $s$

Dans les deux cas présentés ci-dessus, nous observons les résultats énoncés plus haut dans cet article : l'ordre 2 semble effectivement converger en  $1/n^2$  tandis que l'ordre 1 respecte sa décroissance en  $1/n$ . La décroissance de l'ordre 2 est plus difficile à observer car la précision de Monte-Carlo devient de plus en plus handicapante à mesure que la précision augmente. Plus intéressant encore, dès  $N = 1$ , l'ordre 2 est significativement (facteur 5 à 10) meilleur que l'ordre 1.

Sortons du cadre de nos hypothèses et observons désormais ce même processus pour des fonctions  $f$  non dérivables ou à dérivée non bornée. Nous considérerons ici des indicatrices et des fonctions linéaires.

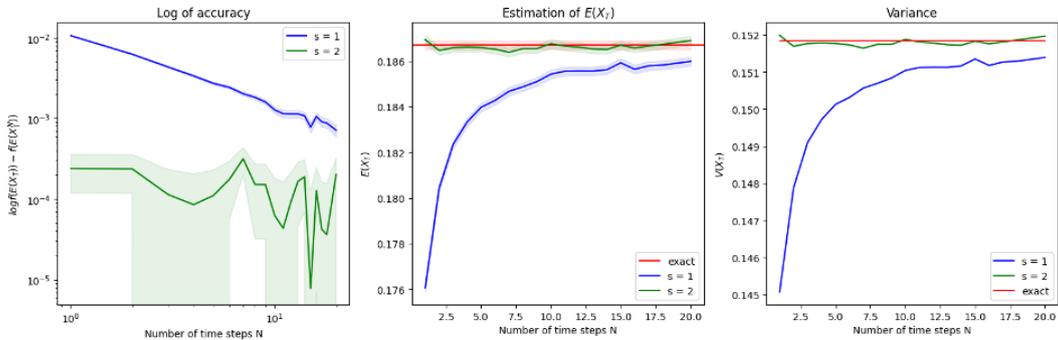


Figure 3: Etude de la convergence pour  $f(x) = \mathbb{1}_{(0 \leq x \leq 0.7)}$  et différents ordres  $s$

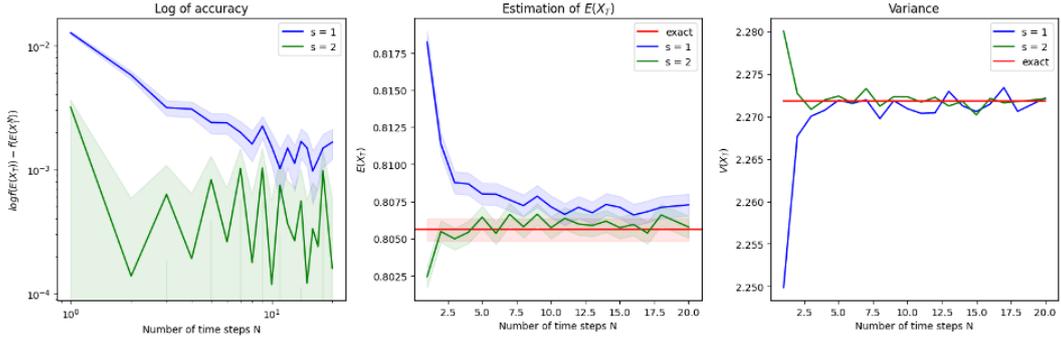


Figure 4: Etude de la convergence pour  $f(x) = x$  et différents ordres  $s$

La méthode d'ordre 1 montre ici encore une convergence du bon ordre. Cependant, l'erreur de Monte-Carlo pour la méthode d'ordre 2 est bien trop grande pour que nous puissions conclure sur l'ordre de convergence empirique de la méthode.

### 5.1.2 Processus avec $b$ et $\sigma$ sinusoidaux

Nous étudions ici un processus qui reste dans le cadre de notre étude où :

$$b(X_t) = \cos(X_t), \quad \sigma(X_t) = \sin(X_t)$$

Nous ne disposons ici d'aucune formule qui permette d'estimer directement  $\mathbb{E}[f(X_T)]$ . Par conséquent, nous allons simuler  $X_T$  avec un processus simulé d'ordre 2  $X_T^N$  pour  $N = 2 \times N_{max}$  où  $N_{max}$  est la plus grande valeur de  $N$  étudiée pour les processus simulés d'ordre 1 et 2. Ce facteur 2 nous garantit une erreur 4 fois inférieure (car il s'agit ici d'un ordre 2) aux erreurs des processus étudiés.

Pour ce processus, toutes les fonctions  $f$  considérées (cas bornée et/ou dérivées bornées et enfin un cas dégénéré) ont respecté les règles de décroissances des approximations polynomiales en  $1/n^s$ .

Nous présentons ici quelques exemples de ces différents cas.

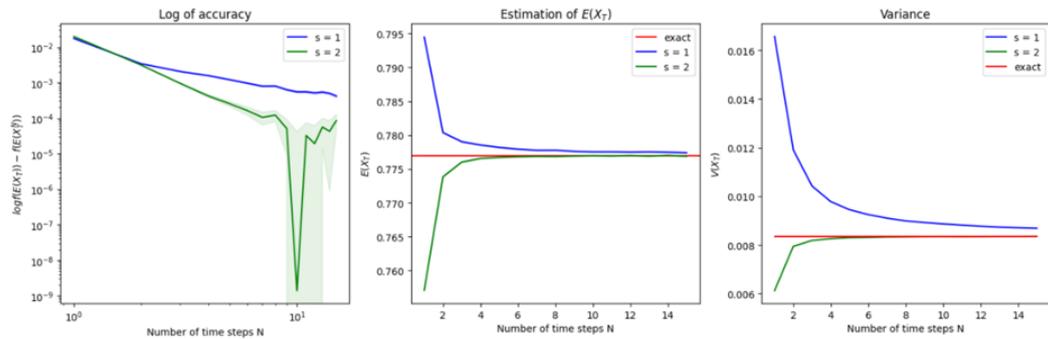


Figure 5: Etude de la convergence pour  $b = \cos$ ,  $\sigma = \sin$ ,  $f = \text{sigmoid}$  et différents ordres  $s$

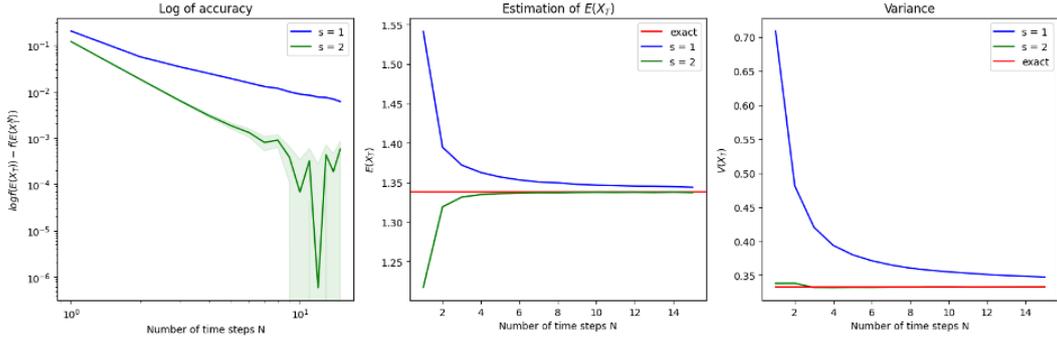


Figure 6: Etude de la convergence pour  $b = \cos$ ,  $\sigma = \sin$ ,  $f(x) = x$  et différents ordres  $s$

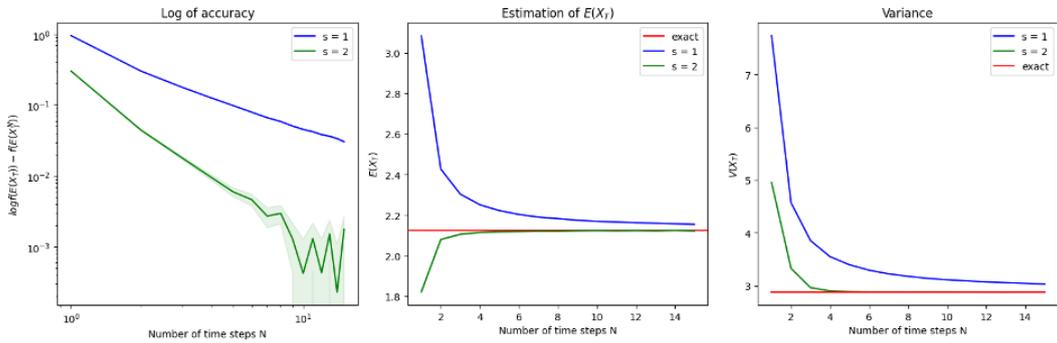


Figure 7: Etude de la convergence pour  $b = \cos$ ,  $\sigma = \sin$ ,  $f(x) = x^2$  et différents ordres  $s$

## 5.2 Processus avec $b$ et/ou $\sigma$ affines

L'objectif ici est de conjecturer (ou non) la généralisation des résultats de cette étude à des processus où  $b$  et  $\sigma$  ne sont plus bornées mais conservent toujours une dérivée bornée.

### 5.2.1 Processus de Black-Scholes

Les processus de Black-Scholes sont définis par l'équation

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

où  $\sigma$  et  $\mu$  sont des constantes. Les fonctions  $b(X_t) = \mu X_t$  et  $\sigma(X_t) = \sigma X_t$  ne sont donc plus bornées mais seulement à dérivées bornées.

Pour de tels processus, nous disposons d'une formule exacte pour  $X_T$  :

$$X_T = X_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)T + \sigma W_T)$$

Ainsi que d'une formule explicite de l'espérance pour  $f : x \rightarrow (x - K)_+$  :

$$E[(X_T - K)_+] = X_0 \exp(\mu T) \times \mathcal{N}(d_1) - K \times \mathcal{N}(d_2)$$

Avec  $\mathcal{N}$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,  $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\log(X_0/K) + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)T)$  et  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

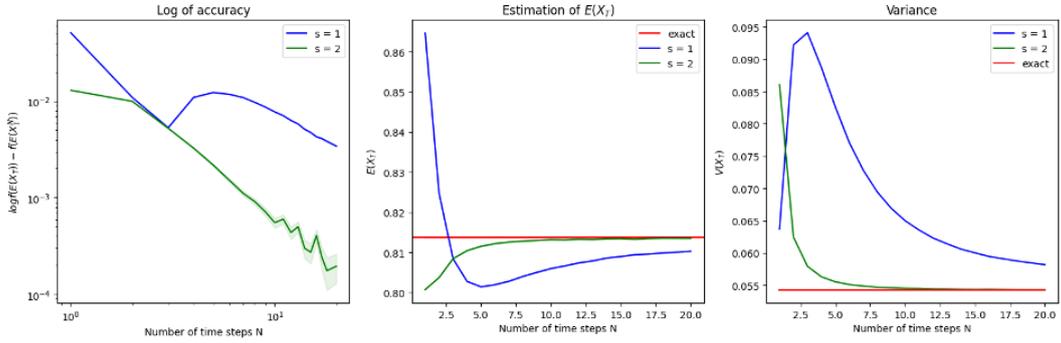


Figure 8: Etude de la convergence pour  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $f = \tanh$  et différents ordres  $s$

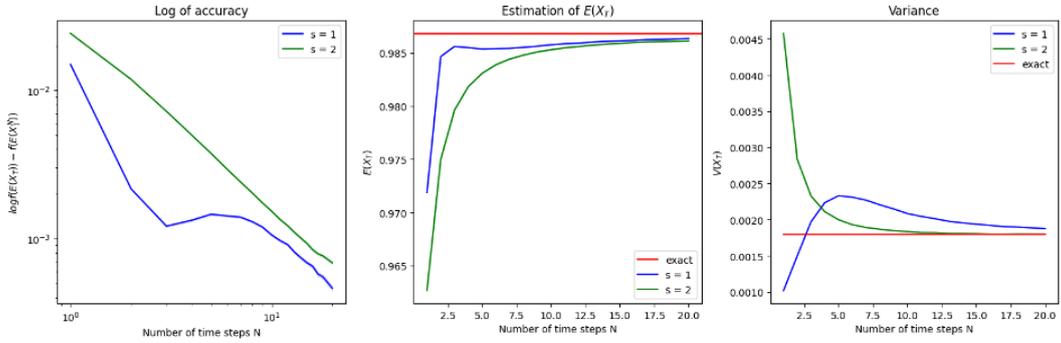


Figure 9: Etude de la convergence pour  $\mu = 3$ ,  $\sigma = 1$ ,  $f = \text{sigmoid}$  et différents ordres  $s$

Les deux figures ci-dessus montrent que la généralisation des résultats pour l'ordre 2 semble être possible pour les cas où  $\mu$  reste relativement faible. En effet, le cas  $\mu = 3$  présente une convergence plus proche de  $1/n^{3/2}$  pour l'ordre 2, alors même que l'ordre 1 respecte sa vitesse de convergence et performe mieux.

Dans le cas de fonctions  $f$  non bornées ou à dérivée non bornée, les processus à faible  $\mu$  présentent des résultats convaincants pour l'ordre 2 tandis que ceux avec  $\mu$  plus élevée amènent à des erreurs relativement similaires entre les deux ordres.

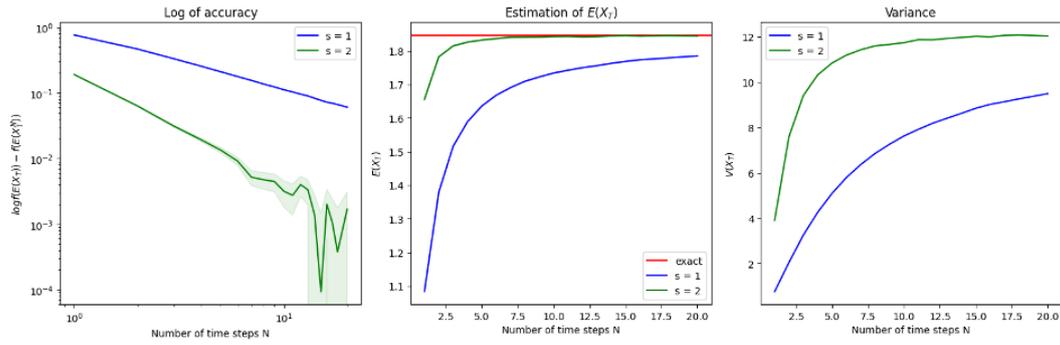


Figure 10: Etude de la convergence pour  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $f(x) = (x - K)_+$  et différents ordres  $s$

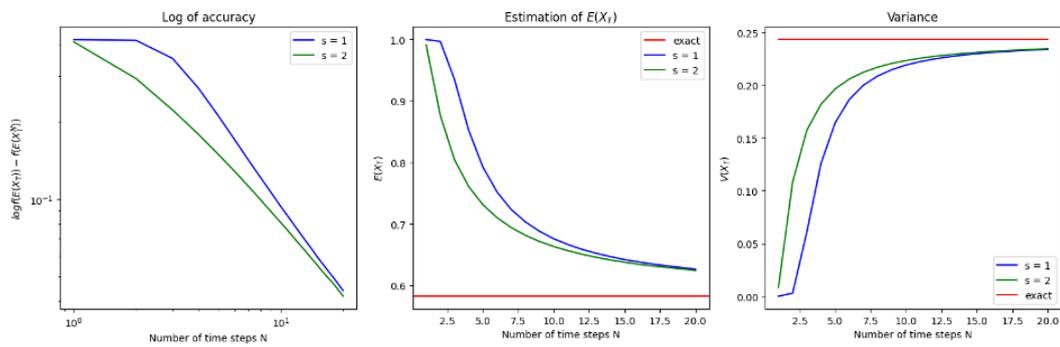


Figure 11: Etude de la convergence pour  $\mu = 3$ ,  $\sigma = 1$ ,  $f(x) = \mathbb{1}_{(0 \leq x \leq 15)}$  et différents ordres  $s$

Enfin, les processus simulés pour des faibles  $\mu$  restent très convaincants même dans des cas de  $f$  dégénérés comme des cas polynomiaux.

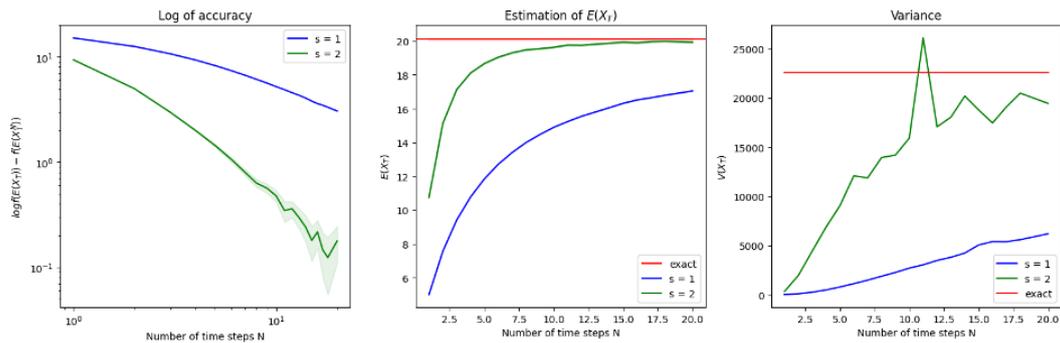


Figure 12: Etude de la convergence pour  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $f(x) = x^2$  et différents ordres  $s$

### 5.2.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Ces processus sont définis par :

$$b(X_t) = \theta(\mu - X_t), \quad \sigma(X_t) = \tilde{\sigma}$$

Pour ces processus, nous pouvons exprimer  $X_T$  et sa loi:

$$X_T = X_0 e^{-\theta T} + \mu (1 - e^{-\theta T}) + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s$$

$$X_T \sim X_0 e^{-\theta T} + \mu (1 - e^{-\theta T}) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}} (1 - e^{-2\theta}) N$$

où  $N$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Dans ce cas-ci, les résultats de notre étude résistent relativement bien au fait que  $b$  ne soit pas bornée et ce, même si le coefficient directeur  $-\theta$  n'est pas faible en valeur absolue.

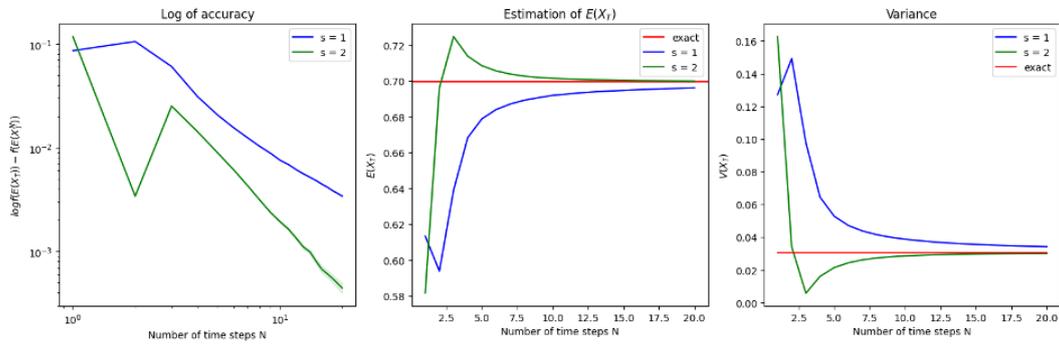


Figure 13: Etude de la convergence pour  $b(x) = 5(1 - x)$ ,  $\sigma = 1$ ,  $f = \text{sigmoid}$  et différents ordres  $s$

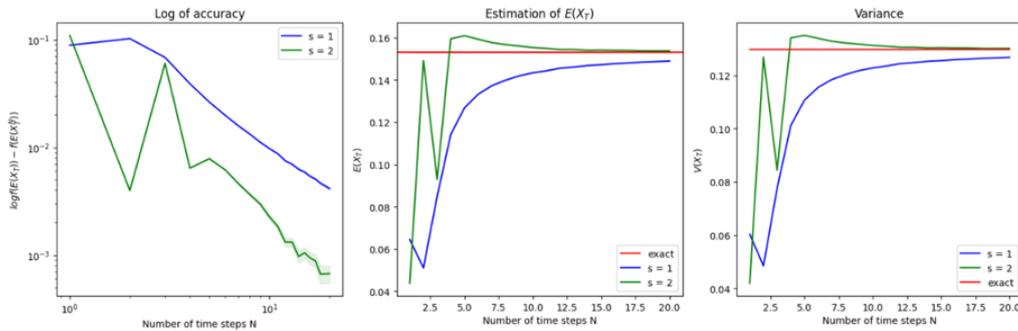


Figure 14: Etude de la convergence pour  $b(x) = 5(1 - x)$ ,  $\sigma = 1$ ,  $f(x) = \mathbb{1}_{(0 \leq x \leq 0.5)}$  et différents ordres  $s$

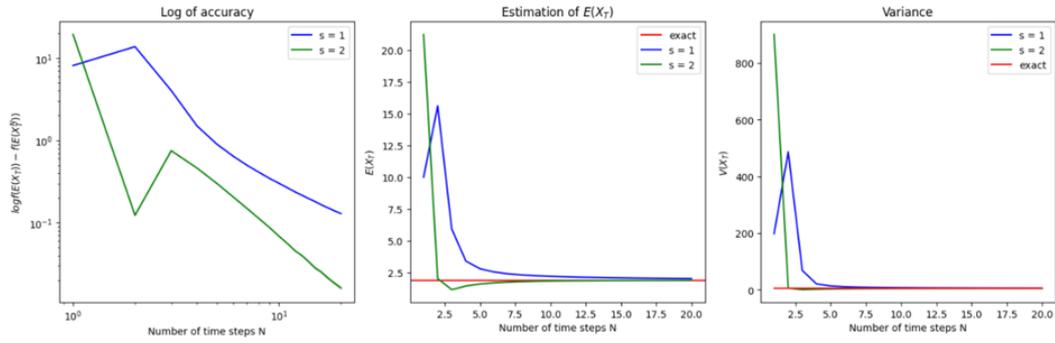


Figure 15: Etude de la convergence pour  $b(x) = 5(1 - x)$ ,  $\sigma = 1$ ,  $f(x) = x^2$  et différents ordres  $s$

### 5.3 Un cas dégénéré avec $b, \sigma$ polynomiaux

Ici, nous considérons un cas qui sort totalement du cadre de notre étude avec

$$b(X_t) = \sigma(X_t) = (X_t)^2/10$$

Le facteur  $/10$  a ici son importance pour ne pas dépasser les valeurs maximales pouvant être calculées par Python.

Ce processus donne des résultats relativement encourageants pour  $f$  bornée à dérivée bornée (ou linéaire).

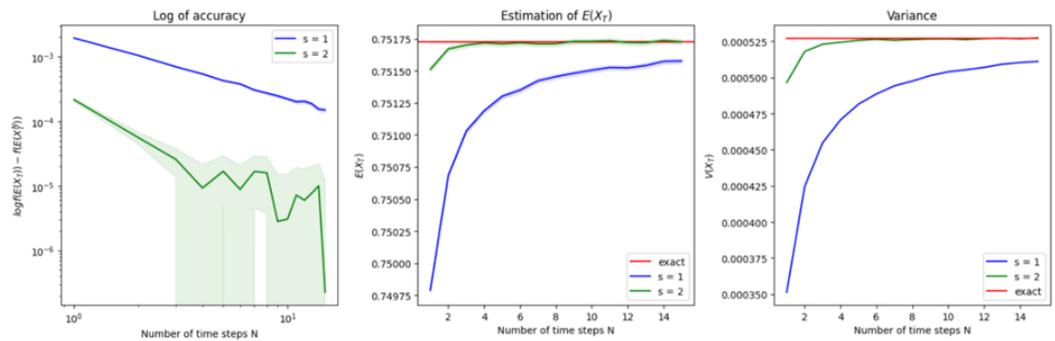


Figure 16: Etude de la convergence pour  $b(x) = \sigma(x) = x^2/10$ ,  $f = \text{sigmoid}$  et différents ordres  $s$

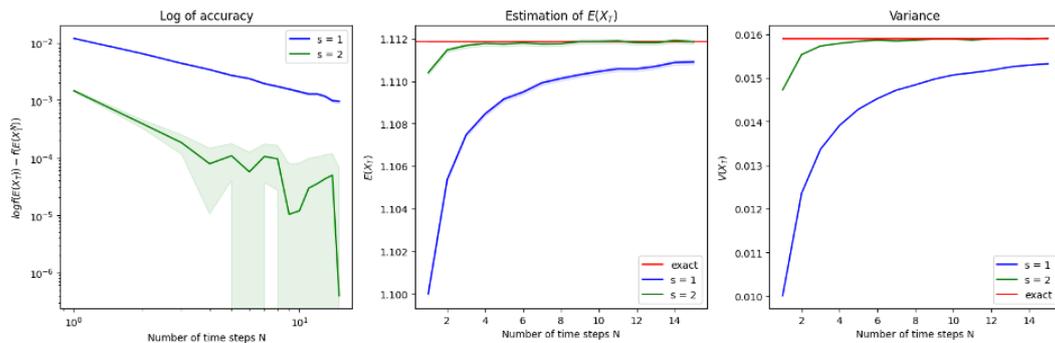


Figure 17: Etude de la convergence pour  $b(x) = \sigma(x) = x^2/10$ ,  $f(x) = x$  et différents ordres  $s$

Avec une indicatrice, les résultats sont toujours encourageants, mais l'erreur de Monte-Carlo est ici trop grande pour que l'on puisse conclure pour la méthode d'ordre 2.

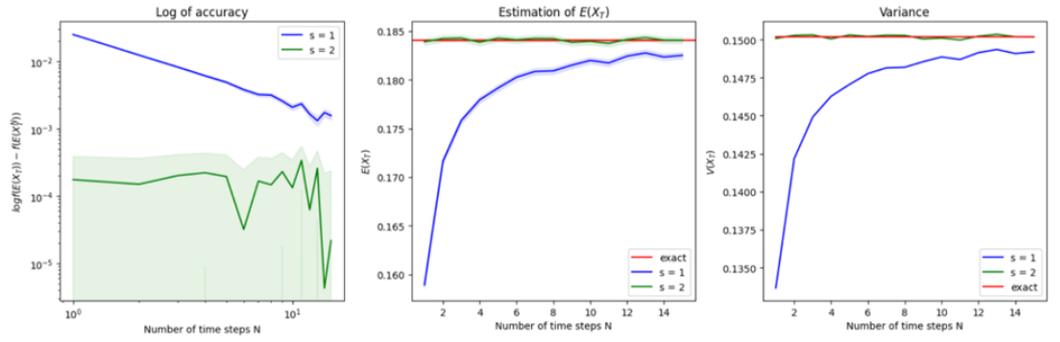


Figure 18: Etude de la convergence pour  $b(x) = \sigma(x) = x^2/10$ ,  $f(x) = \mathbb{1}_{(0 \leq x \leq 1)}$  et différents ordres  $s$

## 5.4 Etude pour $f$ dépendant de la trajectoire

Nous étudions ici des fonctions  $f$  qui n'évaluent pas seulement le processus en  $T$  mais aussi sur toute la trajectoire.

Il y a ici 3 erreurs à considérer :

- L'erreur de Monte-Carlo, que nous savons contrôler
- L'erreur due à la simulation de nos processus par nos schémas.
- L'erreur due au fait que la trajectoire du processus simulé par  $N$  étapes (ordre 1 ou 2) ne contient que  $N$  points.

Il faut donc se placer dans un cas où nous savons estimer cette 3<sup>e</sup> erreur pour qu'elle n'influence pas l'étude de la 2<sup>e</sup> erreur. Nous avons choisi d'étudier le processus  $X_t = h(W_t)$  en reprenant la fonction  $h(x) = x + \log(1 + e^x)$  et de considérer la fonction  $f(X_t) = \sup_{t \leq T} (X_t)_t$ .

$h$  étant strictement croissante et sachant  $\sup_{t \leq T} (W_t)_{t \leq T} \sim |W_T|$  nous pouvons donc simuler la valeur exacte  $\mathbb{E}[\sup_{t \leq T} X_t]$  et la comparer avec l'évolution de

$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq k \leq N} X_{k/N}]$  qui ne considère que  $N$  points du processus exact.

Cette différence nous donne une approximation de la 3<sup>e</sup> erreur énoncée ci-dessus.

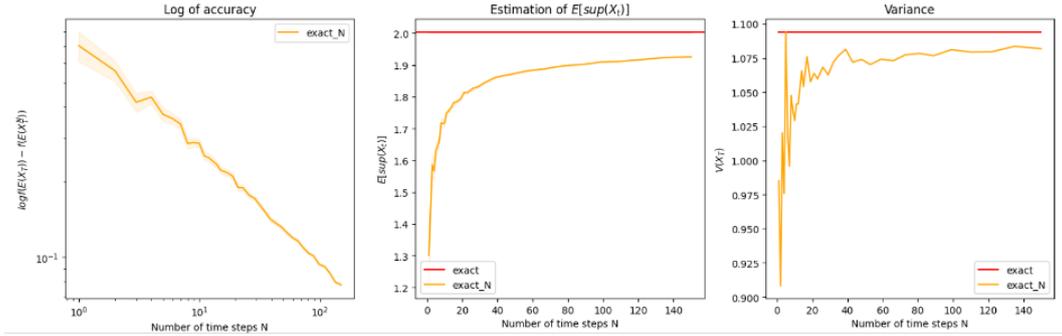


Figure 19: Etude de la convergence de  $|\mathbb{E}[f((X_t)) - f((X_t)_N)]|$  (gauche),  $\mathbb{E}[f((X_t)_N)]$  (centre) et  $\mathbb{V}[f((X_t)_N)]$  (droite)

Désormais, nous pouvons étudier les ordres 1 et 2 et les comparer avec  $\mathbb{E}[f((X_t)_N)]$ .

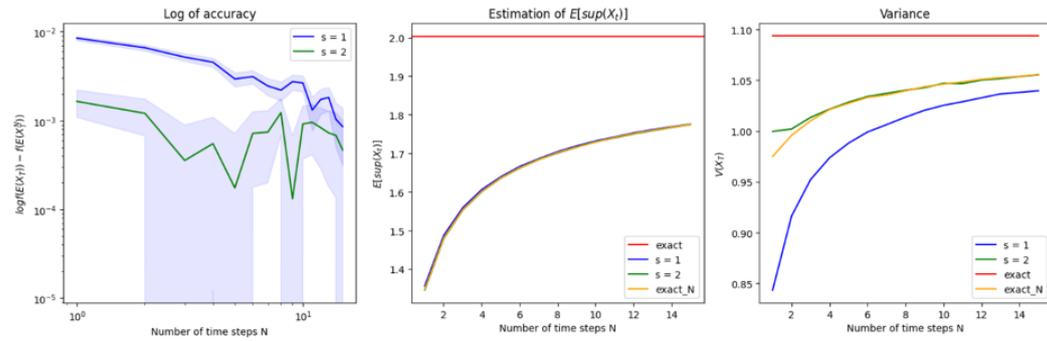


Figure 20: Etude de la convergence de  $|\mathbb{E}[f((X_t)_N) - f((X_t^N)_N)]|$  (gauche),  $\mathbb{E}[f((X_t^N)_N)]$  (centre) et  $\mathbb{V}[f((X_t^N)_N)]$  (droite)

Ici, bien que le processus ait  $b, \sigma$  bornées à dérivées bornées, les vitesses de convergence ne sont pas respectées. L'ordre 1 semble converger légèrement moins vite. L'ordre 2 a à nouveau une erreur de Monte-Carlo trop élevée pour pouvoir conclure de manière sûre, mais il semble tout de même que l'ordre de convergence ne soit pas respecté.

En fin de compte, la principale erreur de ces simulations provient très clairement de la 3<sup>e</sup> erreur étudiée sur la figure (5.4). Il semble plus intéressant de garder le processus d'ordre 1, capable d'aller vers les grands  $N$  à moindre coût et de minimiser l'erreur 2, au mépris de l'erreur 3.

## 6 Annexes de calcul

**Lemme 6.1.** Développement de Taylor

$$\begin{aligned}
g(x, y, z) &= \sum_{k=0}^h \frac{z^k}{k!} \partial_z^k g(x, y, 0) + \frac{z^{1+h}}{h!} \int_0^1 (1-t)^h \partial_z^{1+h} g(x, y, tz) dt \\
\partial_z^k g(x, y, 0) &= \sum_{l=0}^m \frac{y^l}{k!} \partial_z^k \partial_y^l g(x, 0, 0) + \frac{z^{1+m}}{m!} \int_0^1 (1-t)^m \partial_z^k \partial_y^{1+m} g(x, ty, 0) dt \\
g(x, y, z) &= \sum_{k=0}^h \sum_{l=0}^{2h-2k+1} \frac{z^k y^l}{k! l!} \partial_y^l \partial_z^k g(x, 0, 0) \\
&+ \sum_{k=0}^h \frac{z^k y^{2h-2k+2}}{k! (2h-2k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{2h-2k+1} \partial_y^{2h-2k+2} \partial_z^k g(x, ty, 0) dt \\
&+ \frac{z^{1+h}}{h!} \int_0^1 (1-t)^h \partial_z^{1+h} g(x, y, tz) dt
\end{aligned}$$

**Lemme 6.2.** Soit  $\Phi \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ . Alors, il existe  $K > 0$  tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}), \|f \circ \Phi\|_{\infty, q} \leq K \|f\|_{\infty, q}$$

### Démonstration

Notons pour  $n$  un entier,  $\mathcal{P}_k(n)$  l'ensemble des **partitions** de  $[1..n]$  en  $k$  sous-ensembles.

Soit  $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R})$  Soit  $n \leq q$ , et  $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2, 3\}^n$  Soit  $x \in \mathbb{R}^3$

$$\partial_{i_1, \dots, i_n} (f \circ \Phi)(x) = \sum_{k=1}^n f^{(k)}(\Phi(x)) \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{P}_k(n)} \prod_{\{j_1, \dots, j_m\} \in \mathcal{E}} \partial_{j_1, \dots, j_m} \Phi(x) \quad (6.1)$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}
\partial_{i_1, \dots, i_n} (f \circ \Phi)(x) &\leq \sum_{k=1}^n |f^{(k)}(\Phi(x))| \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{P}_k(n)} \prod_{\{j_1, \dots, j_m\} \in \mathcal{E}} |\partial_{j_1, \dots, j_m} \Phi(x)| \\
&\leq \sum_{k=1}^n |f^{(k)}(\Phi(x))| \|\Phi\|_{\infty, n} |\mathcal{P}_k(n)| \\
&\leq K_n \|f\|_{\infty, n}
\end{aligned}$$

pour  $K_n = \max_{1 \leq k \leq n} \|\Phi\|_{\infty, n} |\mathcal{P}_k(n)|$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| \leq q} |\partial_\alpha (f \circ \Phi)(x)| &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| \leq 3} K_{|\alpha|} \|f\|_{\infty, \alpha} \\
&\leq \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| \leq 3} K_{|\alpha|} \right) \|f\|_{\infty, q}
\end{aligned}$$

CQFD

On en déduit qu'il existe des constantes  $K, K_0, \dots, K_h > 0$  telles que

$$\begin{aligned} \forall k \in [0, \dots, h], \forall x \in \mathbb{R}, |R_k(x)| &\leq \frac{K_k}{n^{1+h}} \|f\|_{\infty, 2h+2} \\ \forall x \in \mathbb{R}, |R(x)| &\leq \frac{K}{n^{1+h}} \|f\|_{\infty, 2h+2} \end{aligned}$$

**Lemme 6.3.** Espérance théorique

On rappelle que pour un processus d'Itô  $(X_t)$ , on note  $P_t$  le semi-groupe de Markov associé, avec  $A$  son générateur infinitésimal. En particulier,  $A$  et  $P_t$  commutent, et

$$P_t = Id + h \int_0^t AP_{st} ds$$

En itérant cette formule  $h + 1$  fois, on a

$$P_t = \sum_{k=0}^h \frac{t^k A^k}{k!} + t^{1+h} \int_0^1 (1-t)^h P_{st} A^{1+h} ds$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [f(X_{1/n}) | X_0 = x] &= \sum_{k=0}^h \frac{A^k f(x)}{n^k k!} + \frac{1}{n^{1+h} h!} \int_0^1 (1-t)^h P_{s/n} A^{1+h} f(x) ds \\ &= \sum_{k=0}^h \frac{A^k f(x)}{n^k k!} + \frac{1}{n^{1+h} h!} \int_0^1 (1-t)^h \mathbb{E}_x [A^{1+h} f(X_{s/n})] ds \end{aligned}$$

On en déduit notamment que

$$\left| \mathbb{E} [f(X_{1/n}) | X_0 = x] - \sum_{k=0}^h \frac{A^k f(x)}{n^k k!} \right| \leq \frac{\|A^{1+h} f\|_{\infty}}{n^{1+h} (1+h)!}$$

## 7 Bibliographie

- [1] V. Bally and C. Rey, "Approximation of Markov semigroups in total variation distance," *Electronic Journal of Probability*, vol. 21, no. none, pp. 1–44, 2016. DOI: 10.1214/16-EJP4079. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1214/16-EJP4079>.
- [2] D. Talay and L. Tubaro, "Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations," *Stochastic Analysis and Applications*, vol. 8, no. 4, pp. 483–509, 1990. DOI: 10.1080/07362999008809220. eprint: <https://doi.org/10.1080/07362999008809220>. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/07362999008809220>.
- [3] S. Kusuoka and D. Stroock, "Applications of the malliavin calculus, part i," North-Holland Mathematical Library, vol. 32, K. Itô, Ed., pp. 271–306, 1984. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0924-6509\(08\)70397-0](https://doi.org/10.1016/S0924-6509(08)70397-0).