ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS

Risque de défaut d'entreprises

BENYAMINE Axel, LAMBERT Julien

26/05/23

Sommaire

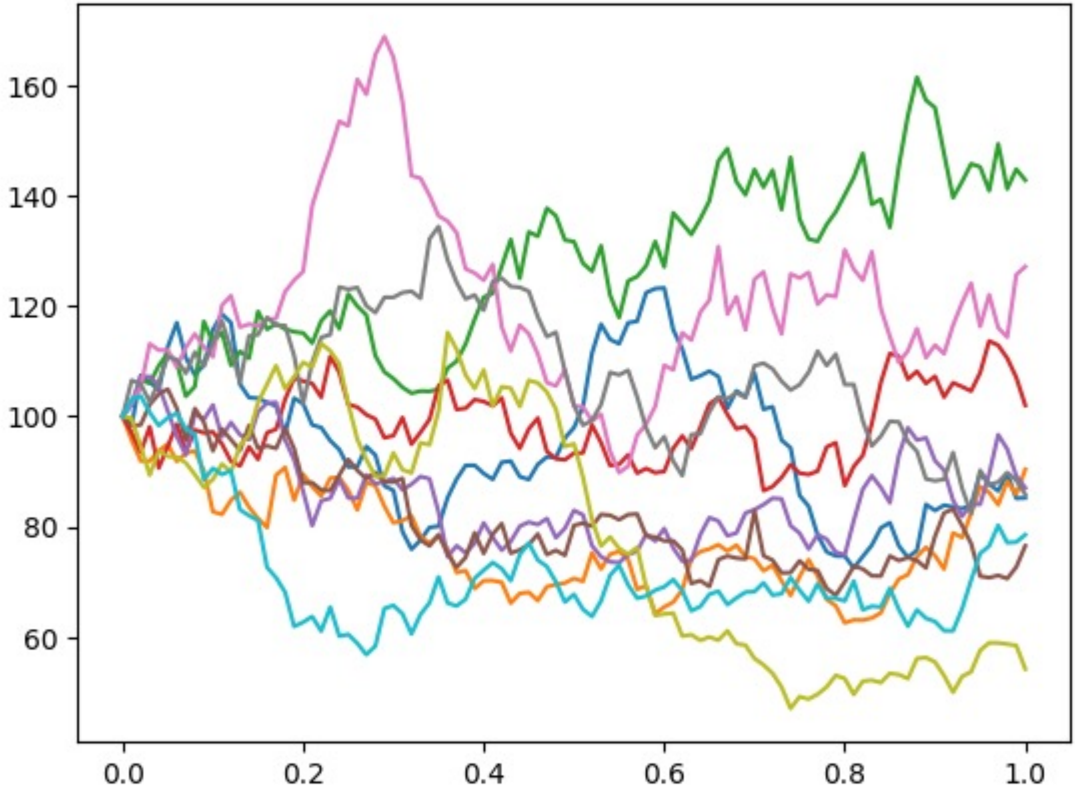
Présentation du problème

Problème

- N entreprises
- Estimation de $\mathbb{P}(L \geq k)$
- Estimation des pertes engendrées par les défauts de paiement

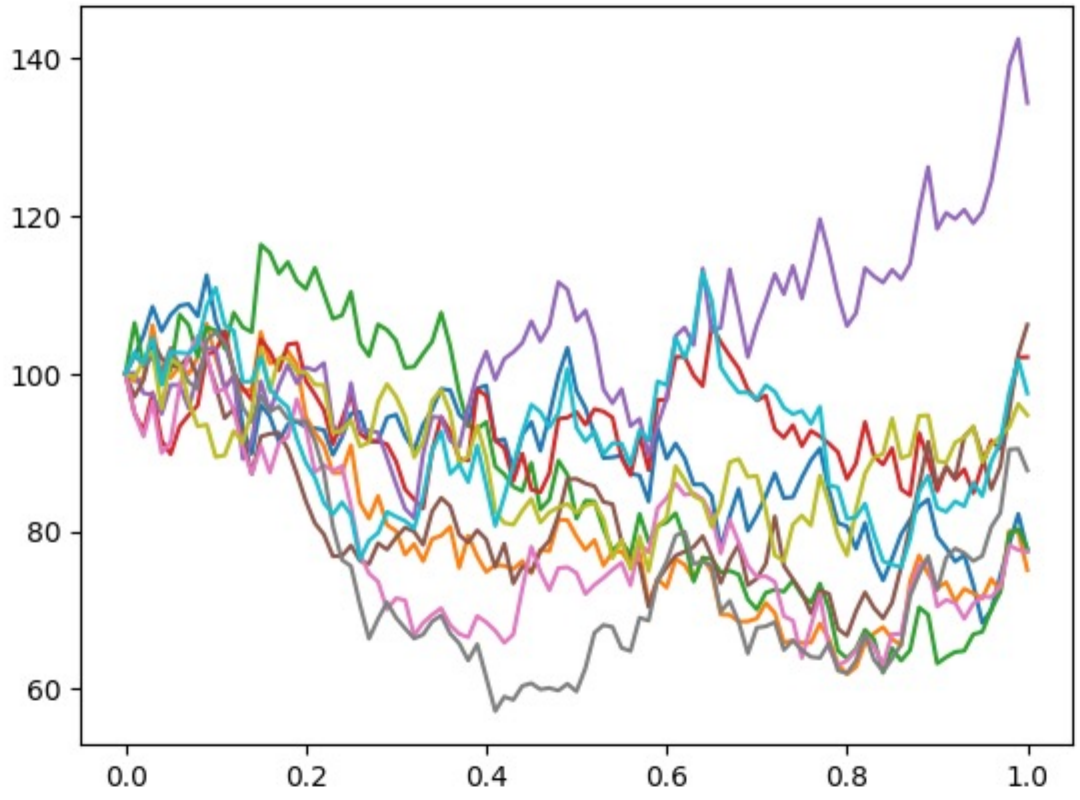
Première modélisation

- $S_t^i = \mathrm{S}_0^{\mathrm{i}}{}^{-\frac{1}{2}\sigma_i^2 t + \sigma_i W_t^i}$ où W^i mouvement brownien
- Faillite lorsque $S_T^i \leq B$
- $(W^1, W^2, .., W^N)$ indépendants
- Calcul théorique possible à partir de la probabilité de faillite d'une entreprise



Ajout d’une corrélation

- $Cov(W_t^1, \ldots, W_t^N) = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho & \ldots & \rho & 1 \end{bmatrix} . t$

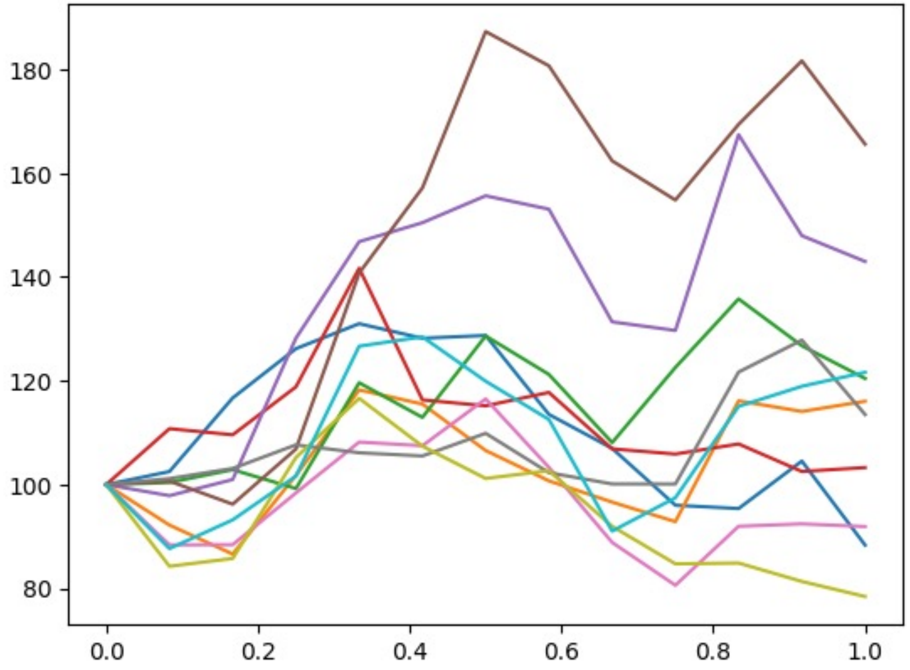


Ajout de plusieurs dates

Faillite lorsque $S_{t_k}^i \leq B$

$\left(S_{t_k}^i\right)_{1 \leq i \leq N, 1 \leq k \leq M} = f(\Delta W),$ où $\Delta W \sim \mathcal{N}(0, A)$

avec $A = \begin{bmatrix} \Sigma.(t_1 - t_0) & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \Sigma.(t_M - t_{M-1}) \end{bmatrix}$



Méthodes de Monte-Carlo

Monte-Carlo naïf

Présentation de la méthode

Un estimateur naïf de $\mathbb{E}[h(X)]$ (estimateur de Monte-Carlo) :

$$\widehat{\mu_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$$

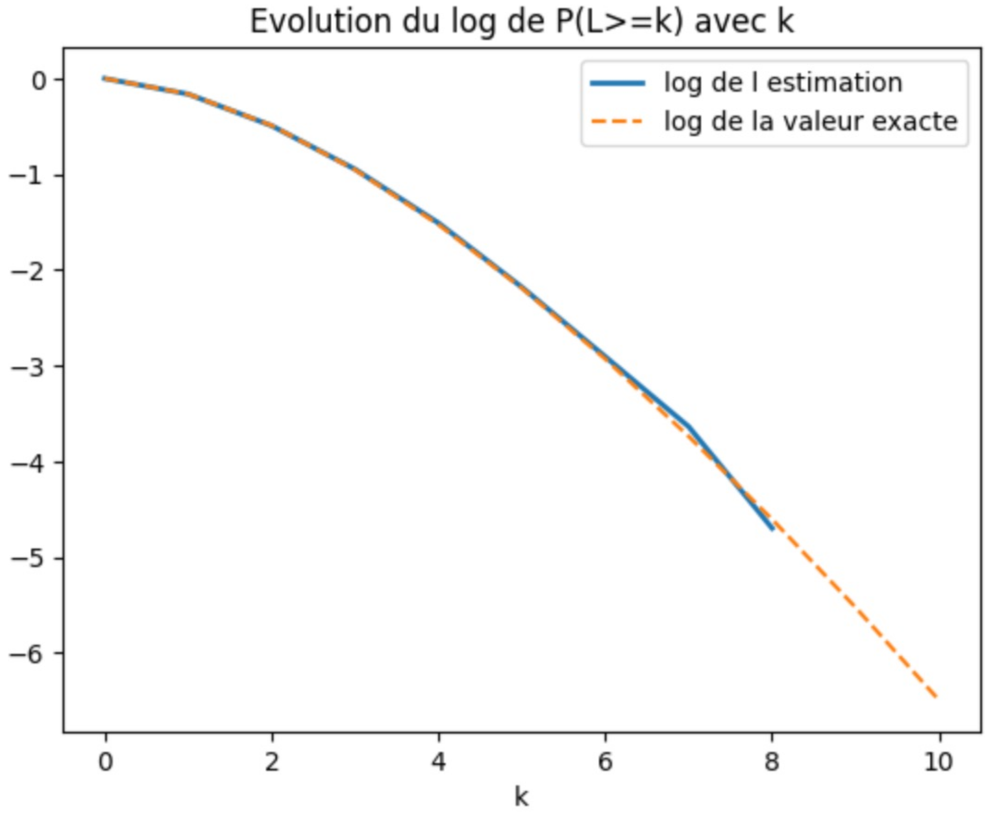
L'erreur relative associée : $1{,}96\sqrt{\frac{1-p}{np}}$

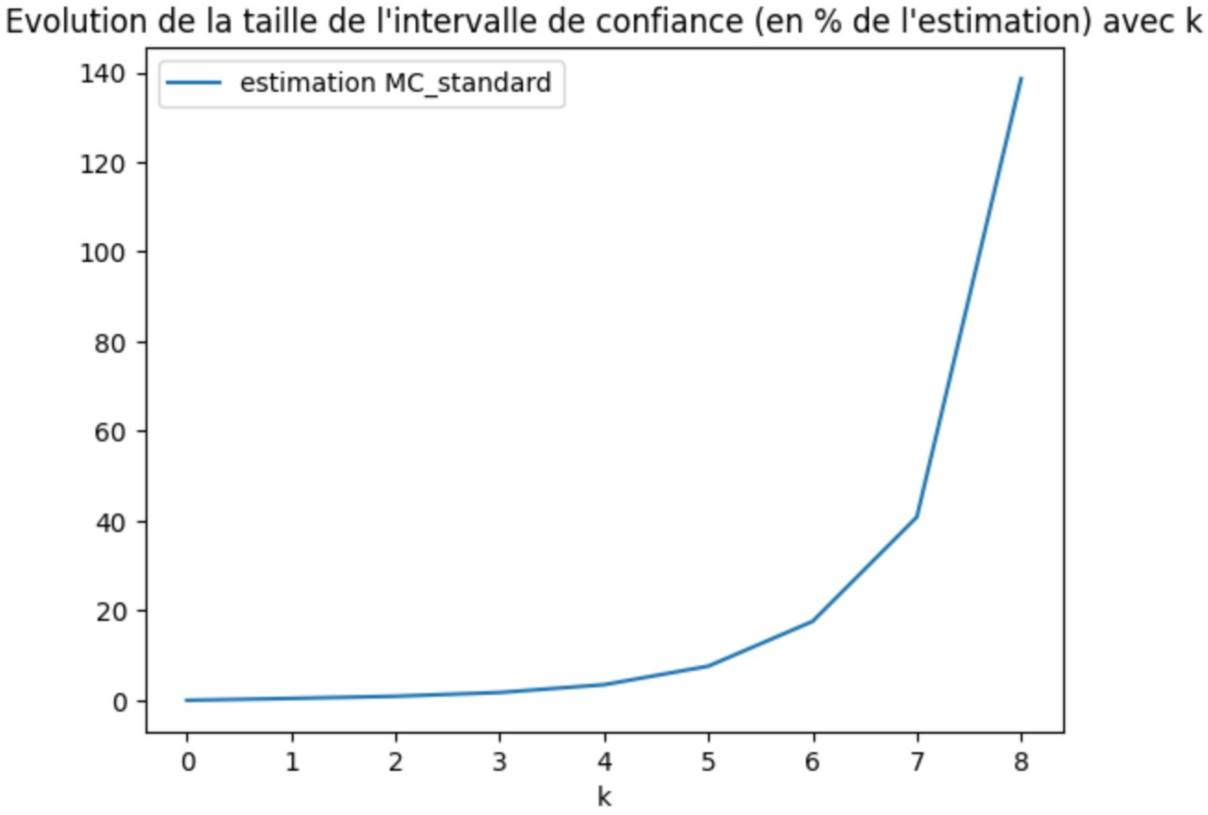
Intérêt : Très fiable $si\ p \ll \frac{1}{n}$ (en pratique $p \leq \frac{1}{10^2 n}$)

Problème : $\widehat{p_n} = 0 \quad sinon$

Résultats de l’implémentation

Pour $n = 10^5$:





Monte-Carlo par échantillonnage d'importance

Présentation de la méthode

$$\mathbb{E}_f[h(X)] = \int_\Omega h(x)f(x)\nu(dx) = \int_\Omega \frac{h(x)f(x)}{g(x)} g(x)\nu(dx) = \mathbb{E}_g\left[\frac{h(X)f(X)}{g(X)}\right]$$

D’où le nouvel estimateur :

$$\widehat{h_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{h(X_k)f(X_k)}{g(X_k)} \text{ où } (X_k)\ i.i.d. \text{ suivant } g.\nu$$

Cas où $X \sim \mathcal{N}(0,\Sigma)$: transformation en $X' \sim \mathcal{N}(\mu,\Sigma)$

$$\mathbb{E}_{(0,\Sigma)}[h(X)] = \mathbb{E}_{(\mu,\Sigma)}\left[h(X')\exp\left(-\mu^T\Sigma^{-1}X' + \frac{1}{2}\mu^T\Sigma^{-1}\mu\right)\right]$$

Cas d'un vecteur gaussien

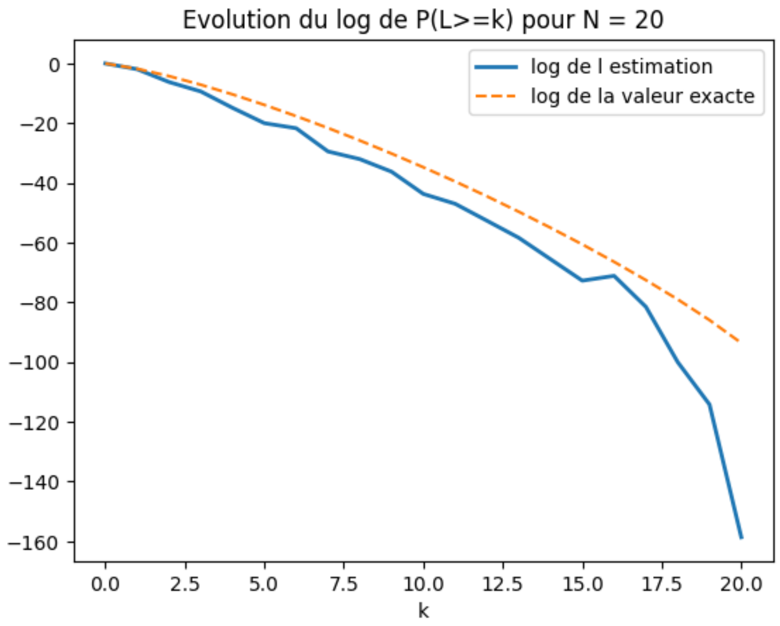
Choix de μ :

1) De telle sorte que la probabilité de faillite soit $\frac{1}{2}$

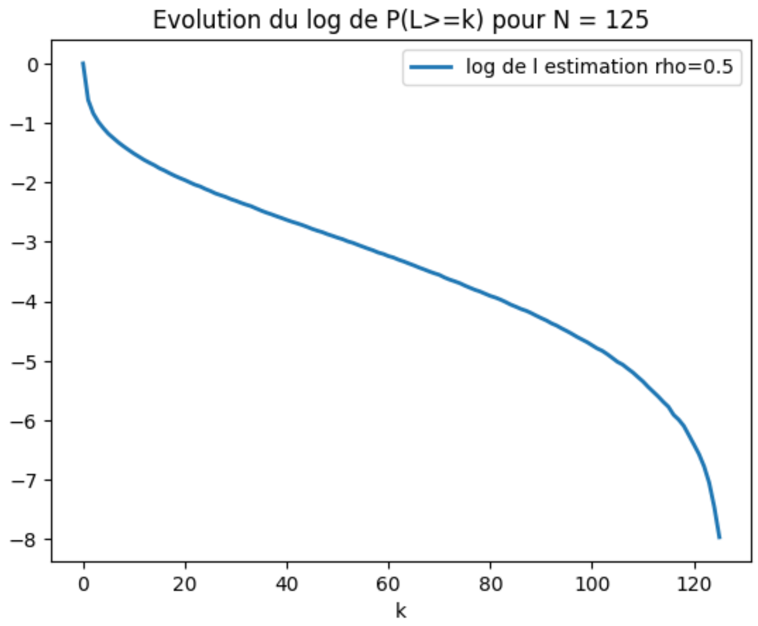
2) De telle sorte que le nombre moyen de faillites soit k

3) De telle sorte que le nombre de faillites à chaque t_k soit k

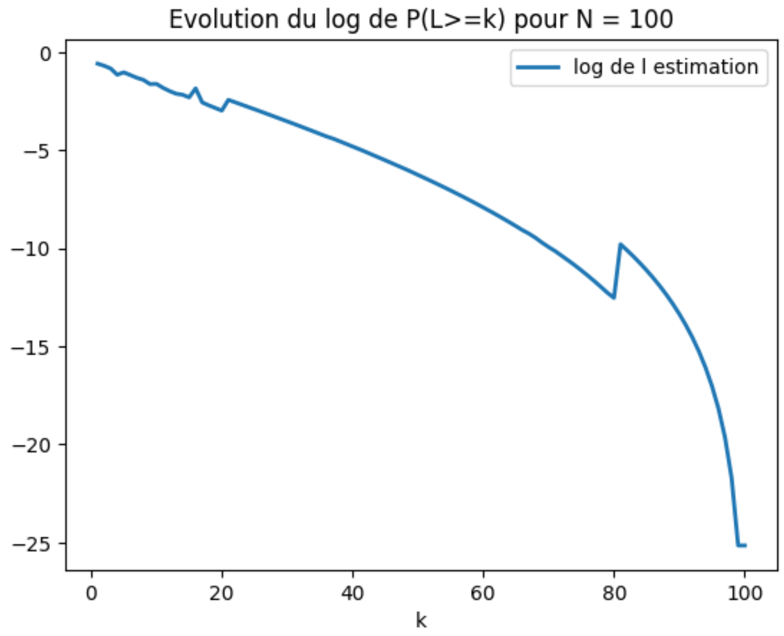
Résultats de l’implémentation



Cas non corrélé



Cas corrélé $\rho = 0.5$



Cas extensions, $N = 100, M = 4$

Problèmes : Explosion de la variance en grande dimension, choix de μ

Méthodes de splitting

Présentation de la méthode

Idée : Calculer $\mathbb{P}(g(X) \geq b)$ *par des probabilités conditionnelles*

$$\mathbb{P}(g(X) \geq b) = \mathbb{P}(g(X) \geq b_0) \prod_{i=0}^{J-1} \mathbb{P}(g(X) \geq b_{i+1} \,|g(X) \geq b_i)$$

avec $b_0 = b \ < b_1 < \cdots < b_J = b$

Pour simuler $X \mid g(X) \geq b_i$:

(X_k) *chaîne de Markov telle que* $\begin{cases} X_{k+1} = aX_k + \sqrt{1-a^2}Y_k & si\ g(aX_k + \sqrt{1-a^2}Y_k) \geq b_i \\ X_{k+1} = X_k & sinon \end{cases}$

Par le théorème ergodique : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{g(X_k)\geq b_{i+1}}$ *estimateur de* $\mathbb{P}(g(X) \geq b_{i+1} \,|g(X) \geq b_i)$

Splitting selon k

Présentation de la méthode

$$\mathbb{P}(L \geq k) = \prod_{i=0}^{J-1} \mathbb{P}(L \geq k_{i+1} \,|L \geq k_i)$$

avec $k_0 = 0 < k_1 < \cdots < k_J = k$

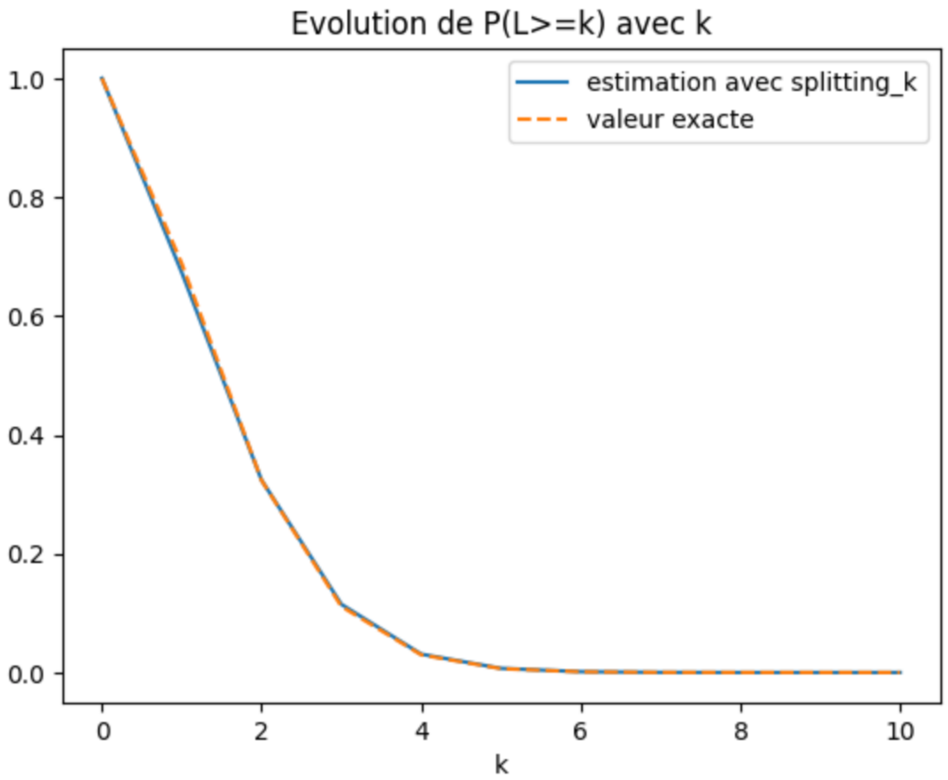
Avantage : *Calcul de tous les* $\mathbb{P}(L \geq k)$ *en une fois*

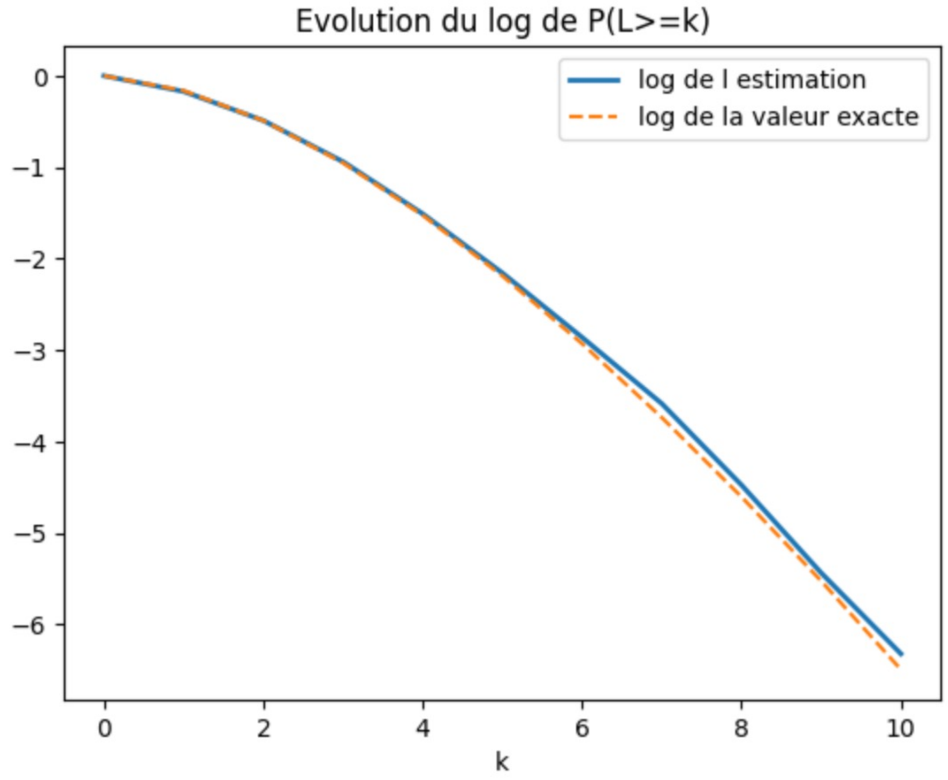
Problème : $\{k_i \text{ possibles}\}$ *n'est pas dense*

$\mathbb{P}(L \geq k_{i+1} \,|L \geq k_i)$ *majorée par* $\mathbb{P}(L \geq k_i + 1 \,|L \geq k_i)$

Résultats de l'implémentation

Pour $n = 10^4$ *(longueur de la chaîne de Markov) et* $a = 0{,}8$ *:*





Splitting selon B

Présentation de la méthode

Pour k fixé : $g_k(X) = X^{(k)}$ *(k-ème min)* *où* $X^{(1)} \leq \cdots \leq X^{(N)}$

$$\mathbb{P}(g_k(X) \leq B) = \prod_{i=0}^{J-1} \mathbb{P}(g_k(X) \leq B_{i+1} \mid g_k(X) \leq B_i)$$

avec $B_0 = +\infty > B_1 > \cdots > B_J = B$

Avantage : $\{B_i \; possibles\} = [B, +\infty[$ *est dense*

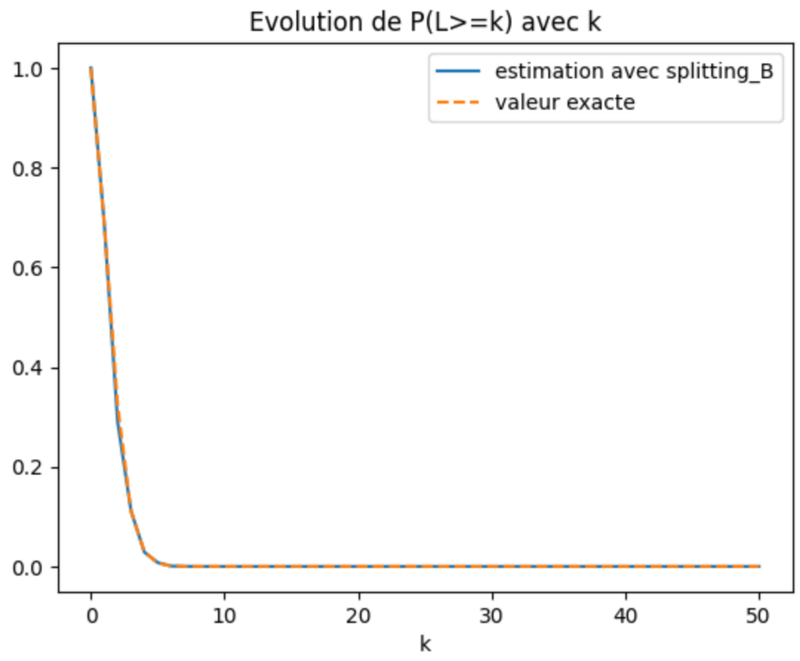
$\mathbb{P}(g_k(X) \geq B_{i+1} \mid g_k(X) \geq B_i)$ *n'est pas majoré*

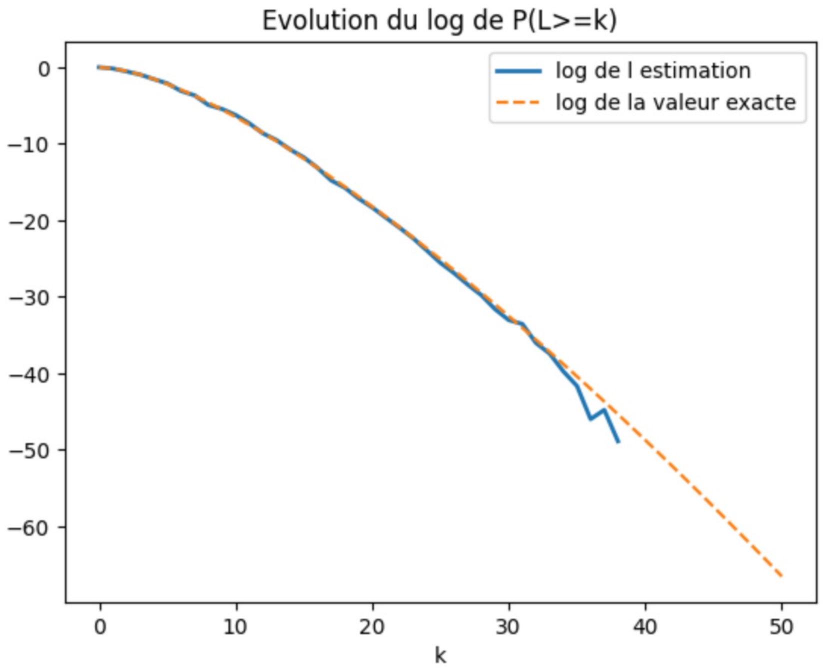
Pour construire $\{B_i\}$ *:* on cherche $\mathbb{P}(g_k(X) \leq B_{i+1} \mid g_k(X) \leq B_i) \approx 10^{-1}$

Désavantage : *dépendance en k de* $\{B_i\}$

Résultats de l'implémentation

Pour $n = 10^4$ *(longueur de la chaîne de Markov) et* $a = 0{,}99$ *:*





Remarques : *Faible précision même pour k faible*

Reste une bonne approximation jusqu'à $p = 10^{-45}$

Échoue vite lorsque a décroit

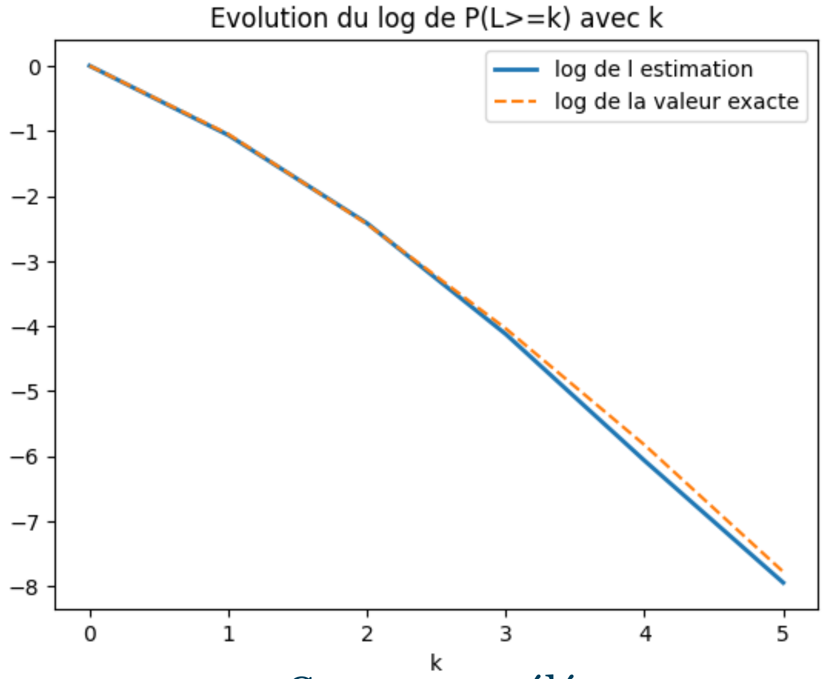
Adaptative Multilevel Splitting

Algorithme

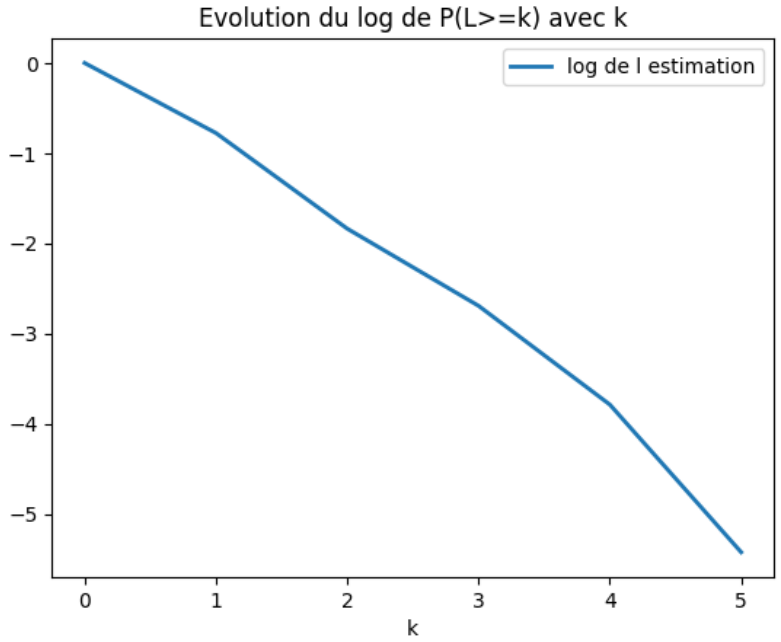
Algorithm 1: Algorithme de la dernière particule pour estimer $\mathbb{P}(S(X) < B)$

Entrée: Nombre de particules n
Sortie : Estimation de $\mathbb{P}(S(X) < B)$
Générer n copies indépendantes $(X_1, \ldots, X_n)$ selon la loi de X
repeat
  Calculer $L = \min(S(X_1), \ldots, S(X_n))$
  for $j = 1$ **to** n **do**
    if $S(X_j) = L$ **then**
      Remplacer X_j par X^* indépendant de $(X_1, \ldots, X_n)$ tel que $X^* \sim \mathcal{L}(X)|S(X) < L$
    end
  end
until $L < B$;
return $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{J_n}$ *où J_n est le nombre d'itérations*;

Résultats de l'implémentation



Cas non corrélé



Cas extensions, $N = 5, M = 4$

Problèmes : Temps de calcul très long qui empêche de calculer pour beaucoup de valeurs/particules

Conclusion

Conclusion

	Avantages	Inconvénients
MC naïf	Fiabilité pour p élevé, Rapidité, Implémentation simple	Non fiable pour p faible
MC importance	Rapidité, Flexibilité	Choix du changement loi complexe
Splitting	Fiable pour p faible	Temps de calcul, Absence de résultats théoriques
AMS	Fiable	Très couteux en temps et en espace, Problème d'indépendance en pratique

Conclusion

- *Augmentation nette des temps de calcul et des variances avec l'ajout de dimensions*
- *Se ramener à calculer des probabilités plus élevées*
- *Choix minutieux et compliqué des hyperparamètres*


Merci
l'X ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS